

文章编号: 2095-2163(2020)01-0095-04

中图分类号: TP391

文献标志码: A

# 基于对偶圆锥曲线的椭圆中心精确定位方法

辛睿, 武栓虎, 李爱娟

(烟台大学 计算机与控制工程学院, 山东 烟台 264005)

**摘要:** 圆模式平面标靶是最常用的标定工具之一, 具有制造简单且对图像质量要求较低等优点。由于镜头畸变和透视偏差, 圆模式平面标靶成像为椭圆。精确提取图像中椭圆的真实中心位置是提高标定精度的关键。针对该问题, 提出了一种可以精确估计椭圆特征的位置和参数的方法。该方法基于对偶圆锥曲线, 避免了直接利用标志点边界附近的原始梯度信息来精确提取单个边缘点的中间阶段。在模拟实验及真实实验中, 对该方法进行了测试评估, 并与其它估计方法进行了比较, 证明该方法抗噪性强, 且具有较高的准确性。

**关键词:** 椭圆中心估计; 对偶圆锥曲线; 偏差矫正; 圆形模式平面标靶

## Calibration method of ellipse center based on dual conic curve

XIN Rui, WU Shuanhu, LI Aijuan

(School of Computer and Control Engineering, Yantai University, Yantai Shandong 264005, China)

**[Abstract]** Circular mode planar targets are one of the most commonly used calibration tools, with the advantages of simple manufacturing and low image quality requirements. The circular mode planar target is imaged as an ellipse due to lens distortion and perspective deviation. Accurate extraction of the real center of the ellipse in the image is the key to improving calibration accuracy. To solve this problem, a method for accurately estimating the position and parameters of elliptical features is proposed. The method is based on the dual conic curve, avoiding the use of the original gradient information near the boundary of the marker point to accurately extract the intermediate phase of individual edge point. The method is tested and evaluated, and compared with other estimation methods in simulation as well as in real situation experiments, it is proved that the method has strong anti-noise and high accuracy.

**[Key words]** ellipse center estimation; dual conic curve; deviation correction; circular mode planar target

## 0 引言

基于圆形模式的平面标靶是近十多年来普遍采用的标定工具, 由于与棋盘模式平面标靶<sup>[1]</sup>相比对图像质量要求较低<sup>[2]</sup>, 在工业上具有较好的应用价值, 广泛应用于三维重建、动态跟踪、机器人制导等方面。

在圆模式平面标靶标定过程中, 由于存在镜头畸变和透视偏差, 圆会投影成一个椭圆<sup>[2]</sup>。椭圆可以通过图像强度或其梯度进行估计, 但是基于强度的方法<sup>[3]</sup>对包括光源、反射等非均匀照明非常敏感, 而且算出的是准确的椭圆中心, 不是真实的圆心投影。与之相比基于梯度的方法受不均匀照明的影响较小, 但往往需要精确提取亚像素级椭圆轮廓边缘点, 再将椭圆参数拟合到获得的点集<sup>[4-6]</sup>。由于该方法依赖于一组事先提取的轮廓点, 轮廓点的异常值会直接影响后续结果。而且在低对比度图像

中, 有时会遇到很难沿椭圆提取每一个轮廓点的情况, 会严重影响椭圆中心的提取。

针对以上问题, 本文在研究圆模式识别方法的基础上, 提出一种直接利用椭圆轮廓附近的梯度矢量场精确获取对偶圆锥曲线的椭圆中心的定位方法。该方法直接从包含特征的区域中计算出的图像梯度估算椭圆中心特征的位置, 避免了亚像素精度的椭圆轮廓边缘点的提取, 简化了椭圆参数获取过程并可以进一步使用原始图像数据来评估恢复的椭圆参数的不确定性。此外, 通过模拟实验和对比实验评估该方法获得椭圆中心的精度、对环境噪声的抵抗性, 证明该方法是可以用在相机标定应用中的高精度特征定位方法。

## 1 基于对偶圆锥曲线的特征点估计方法

### 1.1 对偶圆锥曲线基本性质

椭圆轮廓通常由二次曲线进行描述, 在欧氏几

**基金项目:** 国家自然科学基金青年基金(61802331); 山东省青年博士基金(ZR2018BF008)。

**作者简介:** 辛睿(1993-), 男, 硕士研究生, 主要研究方向: 图像处理、计算机视觉; 武栓虎(1965-), 男, 博士, 教授, 硕士生导师, 主要研究方向: 计算机视觉、图像处理、模式识别; 李爱娟(1994-), 女, 硕士研究生, 主要研究方向: 图像处理、计算机视觉。

**通讯作者:** 武栓虎 Email: wushuanhu@ytu.edu.cn

收稿日期: 2019-10-12

何中,二次曲线有3种主要类型:双曲线、椭圆和抛物线。在经典理论中,这3类曲线是不同方向的平面截二次锥面相得到的曲线,也称为圆锥曲线<sup>[7]</sup>。在非齐次坐标中,设  $p = [x, y]^T$  为圆锥曲线上的点,则圆锥曲线方程为:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \quad (1)$$

其中,  $\alpha = [a, b, c, d, e, f]^T$  为圆锥曲线的系数,该方程可表示为矩阵形式,圆锥曲线系数矩阵为  $C$ :

$$p^T C p = 0, \quad (2)$$

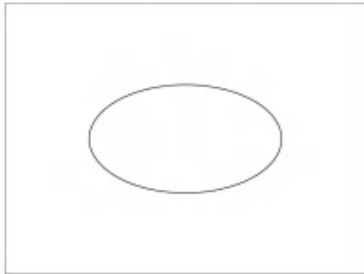
$$C = \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}, \quad (3)$$

设线  $l = [\alpha, \beta, \gamma]^T$ , 由射影几何中对偶原理,齐次点和线的基本结合方程是对称的。则点圆锥曲线  $C$  有一个线圆锥曲线  $C^*$  与之对应,称为对偶圆锥曲线、也称作圆锥曲线的包络<sup>[7]</sup> (如图1所示),圆锥曲线  $C^*$  的所有切线  $l$  均满足:

$$l^T C^* l = 0. \quad (4)$$

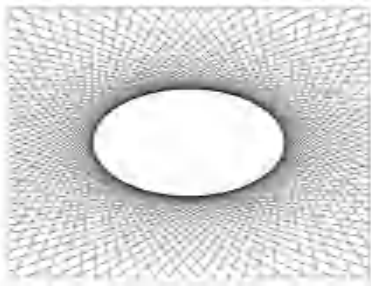
其中,对偶圆锥曲线系数矩阵  $C^*$  为:

$$C^* = \begin{bmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{bmatrix}, \quad (5)$$



(a) 满足  $p^T C p = 0$  的点  $p$  在一条点圆锥曲线上

(a) A point conic curve whose points satisfy  $p^T C p = 0$



(b) 满足  $l^T C^* l = 0$  的直线  $l$  是点圆锥曲线的切线

(b) The tangent set  $l$  of the point conic curve satisfies  $l^T C^* l = 0$

图1 圆锥曲线与对偶圆锥曲线

Fig. 1 Conic curve vs dual conic curve

值得一提的是,设线  $l$  的极点为  $p_0$ , 则线  $l$  的极点可以由  $p_0 = C^* l$  获得。设无穷远线  $l_\infty$  的极点为

$p_\infty$ , 那么对偶圆锥曲线的中心  $e_c = (u_c, v_c)^T$ , 就是对偶圆锥曲线无穷远线的极点  $p_\infty$ 。可以由  $p_\infty = C^* l$  获得<sup>[8]</sup>, 具体公式如下:

$$\xi [u_c, v_c, 1]^T = \begin{bmatrix} D \\ E \\ F \end{bmatrix} = C^* l_\infty. \quad (6)$$

其中,  $\xi$  为比例系数,  $l_\infty$  为无穷远线。由该公式可知,只要求得对偶圆锥曲线参数就可以直接获得标志点中心坐标。对偶圆锥曲线参数的求取首先需要获得一组切线方程,然后通过给定一组切线集合利用最小二乘法<sup>[9]</sup> 进行对偶圆锥曲线参数的估计。接下来对切线方程组的获取进行说明。

## 1.2 基于梯度图像的切线估计方法

求取对偶圆锥曲线首先需要获取切线方程组,切线方程组可以通过求取给定图像的梯度获得。实际上,特征边缘的相邻区域内的像素处的梯度提供了穿过像素中心的法线方向。根据法线和梯度的性质:法线方向垂直于切线方向,可以根据法线求得切线;梯度强的地方(特征边缘)才存在切线,梯度为零的地方切线不存在。在法线不存在但切线存在时,设切线斜率为0,再根据具体像素点确定切线方程。

研究中,将筛选出包含椭圆特征的区域,从包含特征的区域中通过 Scharr 滤波器<sup>[10]</sup> 的方式计算出图像梯度。设点  $p = [x, y]^T$  的梯度为  $\tilde{N}G = [G_x, G_y]^T$ , 图2(a)的符号表示一个  $3 \times 3$  区域内图像点的灰度。通过使用图2(a)中的  $3 \times 3$  模板以及图2(b)、图2(c)中的 Scharr 算子<sup>[10]</sup>, 以  $z_5$  为中心的一个  $3 \times 3$  邻域对  $G_x$  和  $G_y$  的近似如下式所示:

$$G_x = (3z_7 + 10z_8 + 3z_9) - (3z_1 + 10z_2 + 3z_3), \quad (7)$$

$$G_y = (3z_3 + 10z_6 + 3z_9) - (3z_1 + 10z_4 + 3z_7), \quad (8)$$

通过 Scharr 滤波器可以快速得到椭圆轮廓附近的图像梯度,也可以选择其他滤波器进行图像梯度的获取。当  $p = [x, y]^T$  的图像梯度  $\tilde{N}G = [G_x, G_y]^T$  不为零时,可以定义通过像素中心的线的法线方向(法线方向垂直于切线方向),得到切线方程  $l$ :

$$l = \lambda [G_x, G_y, -\tilde{N}G^T p]^T. \quad (9)$$

其中,  $\lambda$  为任意比例系数。通过求取椭圆轮廓附近所有的图像梯度,可以获得该椭圆图像的切线集合。

## 1.3 对偶圆锥曲线参数估计方法

通过求取的一组切线集合  $l_i$ ,  $i$  为切线的下标,  $i \geq 5$ 。对偶圆锥曲线参数可以通过最小二乘法<sup>[9]</sup> 进行估计。设切线  $l_i = [x_i, y_i, k_i]^T$ , 用公式(10)作

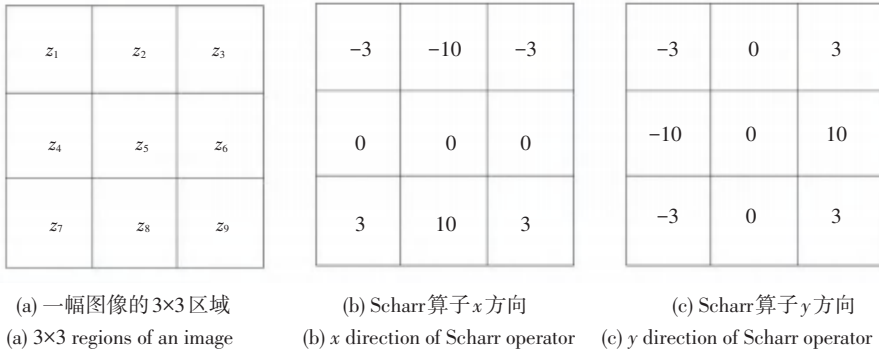


图 2 Scharr 滤波器滤波系数  
Fig. 2 Scharr filter coefficient

为近似拟合函数, 在对偶圆锥曲线中加入约束  $A = 1$ , 则:

$$x_i^2 + B^* x_i y_i + C^* y_i^2 + D^* x_i k_i + E^* y_i k_i + F^* k_i^2 = 0, \quad (10)$$

$$Q(B^*, C^*, D^*, E^*, F^*) = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + B^* x_i y_i + C^* y_i^2 + D^* x_i k_i + E^* y_i k_i + F^* k_i^2)^2, \quad (11)$$

使均方误差, 即式(11)最小, 则设  $\frac{\partial Q}{\partial B^*} = \frac{\partial Q}{\partial C^*} = \frac{\partial Q}{\partial D^*} = \frac{\partial Q}{\partial E^*} = \frac{\partial Q}{\partial F^*} = 0$ , 可得矩阵方程(12)为:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i k_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i^2 k_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i k_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i^3 & \sum_{i=1}^n y_i^4 & \sum_{i=1}^n x_i y_i^2 k_i & \sum_{i=1}^n y_i^3 k_i & \sum_{i=1}^n y_i^2 k_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i k_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i^2 k_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 k_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i y_i k_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i k_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i^2 k_i & \sum_{i=1}^n y_i^3 k_i & \sum_{i=1}^n x_i y_i k_i^2 & \sum_{i=1}^n y_i^2 k_i^2 & \sum_{i=1}^n y_i k_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i k_i^2 & \sum_{i=1}^n y_i^2 k_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i k_i^3 & \sum_{i=1}^n y_i k_i^3 & \sum_{i=1}^n k_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^* \\ C^* \\ D^* \\ E^* \\ F^* \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^3 y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i^3 k_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i k_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 k_i^2 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

可由方程(12)解得:

$$\omega = [B^*, C^*, D^*, E^*, F^*]^T.$$

由于  $D^*, E^*, F^*$  与  $D, E, F$  只相差一个比例系数  $A$ 。对公式(9)结果不产生影响, 可由公式(6)求得对偶圆锥曲线中心。

### 1.4 算法步骤

本文提出的基于对偶圆锥曲线的椭圆中心精确定位方法的具体步骤如下:

- (1) 对图像进行预处理。灰度化, 均值滤波, 再对图像进行二值化。
- (2) 通过 1.2 节方法提取二值图像梯度图像, 筛选出包含椭圆特征的区域。
- (3) 利用梯度图像上保留的轮廓法线信息通过 1.2 节方法获得椭圆边缘的切线集合。
- (4) 通过 1.3 节方法提取出每一幅图片中的所有对偶圆锥曲线中心。

## 2 实验与结果

实验的目的是要验证, 无需亚像素精度的标志点轮廓边缘点的提取, 通过本文提出的对偶圆锥曲线方法就可获得较为精确的标靶圆心对应特征点。进行了模拟噪声实验, 验证该方法受环境噪声影响较小。

在实际环境中, 由于透视偏差以及镜头畸变, 圆经过相机模型进行投影会变成一个椭圆, 如图 3(a) 所示, 半径为 2.2 cm 的圆型标志点经过透视投影到图像上, 变成了一个椭圆, 如图 3(b) 所示。本文通过文献[1]中相机模型模拟了该过程, 并生成了 200 幅不同的椭圆图像, 图 3(c) 为部分成像。首先在世界坐标系创建一个圆, 通过设定圆的半径可以改变圆的大小, 通过让旋转角度的弧度值在  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  的范围内分别随机变化生成不同的椭圆图像, 圆的圆心投影进行记录用以误差分析。

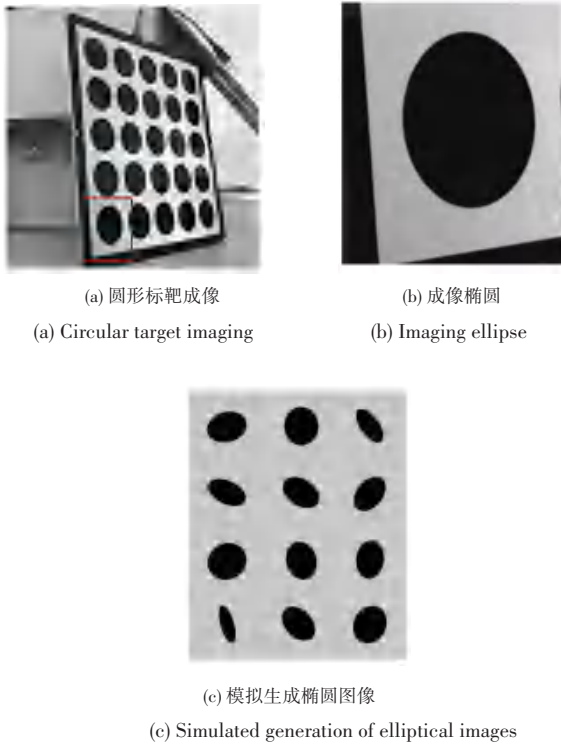


图3 实验图像

Fig. 3 Experimental image

在本实验中,为了检测本文方法的准确性,在不添加任何噪声的情况下,使用本文方法对 200 幅图像进行椭圆真实中心的识别,并与真值椭圆中心进行比较算出椭圆中心的相对误差。同时也对质心法,点心法进行了实验对比,实验结果见表 1。由表 1 可知,本文方法取得了较为理想的效果。接下来,图像被加性高斯噪声污染,标准偏差从  $\sigma_n = 2\%$ , 增加到图像动态范围的 5%。对于每一个噪声水平,在 200 个不同的单个椭圆图像上评估椭圆位置的平均误差。

表 1 实验结果对比

Tab. 1 Comparison of experimental results pixel

Method	Mean error		
	$\sigma_n=0\%$	$\sigma_n=2\%$	$\sigma_n=5\%$
The proposed	0.006 342 1	0.007 624 9	0.009 537 4
Centroid	0.009 514 8	0.011 436 4	0.012 873 3
PointEllipse	0.009 932 4	0.010 956 1	0.011 643 7

实验结果表明,在不添加任何噪声的情况下,质心法和点心法直接获得的是椭圆中心,而对偶圆锥曲线方法更接近于真实的中心投影。但是由于质心

法在特征的所有像素上取平均值,因此具有很强的抗噪能力,而对偶圆锥曲线的方法随着噪声的增加,对梯度方向的估计变得不太精确,在  $\sigma_n = 5\%$  与点心法有了相似的精度,可以通过改进梯度值的估计来提高本文方法的精度。最后,表 1 证实了这 3 种方法精度都在 0.1pixel 左右,具有较高的精度和抗噪性能。

### 3 结束语

特征点精确估计是相机标定过程中非常重要的部分。圆模式平面标靶是一常用的相机标定工具,相对棋盘标靶,具有制造容易、特征点恢复受光照和噪声的影响较小的特点。但由于环境噪声和像素化的影响,直接利用提取的椭圆轮廓往往会产生一些误差,从而降低了标定精度。本文提出了一种基于对偶圆锥曲线获取标志点中心的标定方法,直接利用标志点边界附近的原始梯度信息,避免了不精确边缘点集的提取,在对抗噪声方面具有一定优势,并且直接应用最小二乘法计算对偶圆锥曲线中心,可以简化获取椭圆真实中心的步骤的同时避免了部分噪声点的干扰,具有较好的应用价值。

### 参考文献

- [1] ZHANG Z Y. A flexible new technique for camera calibration[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Automation, 2000, 22(11): 1330-1334.
- [2] HEIKKILA J. Geometric camera calibration using circular control points[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence, 2000, 22(10): 1066-1077.
- [3] NIGHTINGALE A M, GORDEYEV S. Shack - hartmann wavefront sensor image analysis: A comparison of centroiding methods and image - processing techniques [J]. Optical Engineering, 2013, 52(7): 071413.
- [4] CABRERA J, MEER P. Unbiased estimation of ellipses by bootstrapping [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis & Machine Intelligence, 1996, 18(7): 752-756.
- [5] 姚强,王亚刚,张伟,等. 基于亚像素边缘的摄像机标定板特征提取算法[J]. 包装工程, 2018, 39(11): 165-170.
- [6] 解则晓,王晓敏. 平面标定靶标标记点的圆心提取[J]. 光学精密工程, 2019, 27(2): 440-449.
- [7] RICHARD H, ANDREW Z. Multiple view geometry in computer vision[M]. 2<sup>nd</sup> ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.
- [8] KENICHI K. Geometric computation for machine vision[M]. New York: Oxford University Press, 1993.
- [9] MORÉ J J. The Levenberg - Marquardt algorithm: implementation and theory [M]//WATSON G A. Numerical analysis. Lecture Notes in Mathematics. Berlin/Heidelberg : Springer, 1978, 630: 105-116.
- [10] GONZALEZ R C, WOODS R E. Digital image processing[M]. 3<sup>rd</sup> ed. Upper Saddle River: Prentice Hall Press, 2011.