

文章编号: 2095-2163(2019)06-0138-06

中图分类号: TP242

文献标志码: A

# 超冗余移动机械臂逆运动学快速求解的两种方法比较

马影, 陈丽, 高其远, 邓宇翔

(上海工程技术大学 航空运输学院, 上海 201620)

**摘要:** 超冗余移动机械臂的逆运动学求解一直是机器人领域研究的热点,特别是逆运动学求解过程中导致的计算量大、机械臂的位形偏移量大及能耗大等问题还未得到有效解决。因此本文给出基于几何方法的超冗余机械臂逆运动学快速求解算法,并分析了两种关节位置更新策略的能耗。第一种关节位置更新策略为“关节落在连线上”,即更新后的关节位置落在该关节的目标点和与其相连的前一个关节的连线上;第二种关节位置更新策略为“关节落在轴线上”,即更新后的关节位置落在前一时刻的该关节和与其相连的前一个关节的轴线上。从运动过程中关节跟踪角度变化范围多少出发,比较超冗余移动机械臂在这2种关节更新策略下运动特点。实验结果显示,方法1具有关节移动范围小,移动距离短的特点。方法2具有各个关节都有相似的运动轨迹,机械臂的末端跟随效果好的特点。

**关键词:** 超冗余移动机械臂; 逆运动学; 几何解析法; 关节更新策略

## Comparison of two rapid inverse kinematics solutions for super-redundant mobile manipulator

MA Ying, CHEN Li, GAO Qiyuan, DENG Yuxiang

(School of Air Transport, Shanghai University of Engineering and Technology, Shanghai 201620, China)

**[Abstract]** The inverse kinematics solution of super-redundant mobile manipulators has always been a hotspot in the field of robotics. An effective solution has not been achieved especially on the problems caused by large computational complexity, large displacement of mechanical arms and high energy consumption caused by inverse kinematics. Therefore, this paper presents a fast algorithm for inverse kinematics of super-redundant manipulators based on geometric methods, and analyzes the energy consumption of two joint position update strategies. The first joint position update strategy is “the joint falls on the line”, that is, the updated joint position falls on the line connecting the target point of the joint and the previous joint connected thereto; the second joint position update strategy is “The joint falls on the axis”, that is, the updated joint position falls on the axis of the joint at the previous moment and the previous joint connected thereto. Starting from the range of joint tracking angle during the movement, the motion characteristics of the super-redundant mobile robot arm under these two joint renewal strategies are compared. The experimental results show that the method 1 has the characteristics of small joint movement range and short moving distance and method 2 has similar motion trajectories for each joint, and the end of the mechanical arm has a good follow-up effect.

**[Key words]** super-redundant mobile robot arm; inverse kinematics; numerical analysis method; joint position update strategy

## 0 引言

超冗余移动机械臂是由杆件、关节、末端执行器组成的互相连接互相依赖的运动机构<sup>[1]</sup>。相对于固定机械臂而言,超冗余移动机械臂具有作业范围大、灵活性高和广阔的应用前景<sup>[2-3]</sup>。因此移动机械臂广泛应用在搬运、焊接、灾后救援、探测、等恶劣环境中<sup>[4]</sup>。但是对于冗余型移动机械臂而言,逆运动学求解计算量大且不唯一、机械臂运动位形偏移量大、逆解求解速度缓慢等是需要攻克的难题<sup>[5-6]</sup>。

近年来,求解机械臂逆解的方法主要有数值迭

代法<sup>[7-8]</sup>、智能算法。目前,也相继涌现出一系列的研究成果。朱经纬等人<sup>[9]</sup>提出了一种自适应粒子群算法求解机械臂逆运动学,以正向运动学方程为基础,将冗余机械臂逆运动学解问题转化为等效最小值问题。张熙峰等人<sup>[10]</sup>提出了基于遗传算法的机械臂逆运动学求解,将种群定义为机械臂的关节角轨迹层面,利用连续性函数来实现算法的初始化算子、交叉算子和变异算子。张云峰等人<sup>[11]</sup>提出了基于改进 QPSO-NN(粒子群优化)的冗余机械臂逆运动学算法,以冗余机械臂末端位姿为输入,利用神经网络算法求得其逆解。李梅红<sup>[12]</sup>提出了一种动

**基金项目:** 国家自然科学基金(61733017); 机器人国家重点实验室基金(2018013); 上海浦江人才计划资助项目(18PJD018)。

**作者简介:** 马影(1995-),女,硕士研究生,主要研究方向:移动机械臂控制; 陈丽(1975-),女,研究员,主要研究方向:机器人控制; 高其远(1997-),男,硕士研究生,主要研究方向:移动机械臂控制; 邓宇翔(1996-),男,硕士研究生,主要研究方向:移动机械臂控制。

**通讯作者:** 陈丽 Email: cl200432@tom.com

收稿日期: 2019-09-03

态变步长果绳算法求冗余机械臂逆运动学解,在果绳算法的基础上,通过适应度值对果绳种群进行动态规划,此后 2 个子群按照不同的公式进行搜索步长的计算并完成位置更新。上述智能算法能很好地求出逆解,但由于中间过程需要搜索、判断、寻优过程,因此计算量大,导致求解速度较慢。

本文提出了基于几何推导的解析算法,可以快速完成逆运动学的求解。根据杆的长度约束可以唯一地确定出关节移动后的具体位置。给出了 2 种关节更新策略:关节落在连杆上的方法(方法 2)和关节落在连线上的方法(方法 1),仿真分析了 2 种方法的各种特点。

## 1 超冗余移动机械臂结构和工作空间分析

### 1.1 结构参数介绍

文中的超冗余移动机械臂主要由基座、臂杆、关节、末端执行器和驱动装置组成,整体结构如图 1(a)所示。其中,基座装在可移动的平台或者直线导轨上,与移动基座固接的部分为可伸缩机构,可以实现基座垂直或水平方向上的移动,规定基座的最大进给距离为 60 cm,机械臂的连杆共 9 节,由 10 个关节相连,单模块由连杆和关节组成,长度为 5 cm,机械臂总长为 80 cm。机械臂的目标工作空间为  $100 \times 100 \text{ cm}^2$  的平面,具体连杆参数定义如图 1(b)所示。

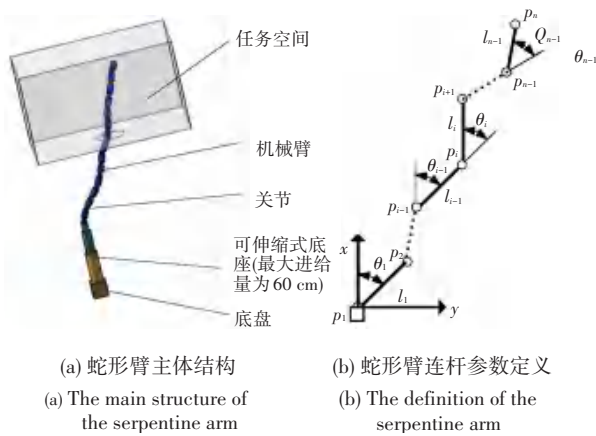


图 1 蛇形臂主体结构 and 连杆参数定义

Fig. 1 The main structure and definition of the serpentine arm

单模块参数定义如下:  $p_i$  为模块  $i$  的关节位置,  $l_i$  为模块  $i$  的连杆长度,  $\theta_i$  为模块  $i$  和前一模块  $i - 1$  的相对转角。

### 1.2 末端执行器的可达空间分析

根据机械臂的长度和底座最大进给量,通过正

运动学推导确定出末端执行器的运动区域。借助拉丁超立方抽样获得工作空间的采样点,拉丁超立方取样对样本数量的节省上效果尤为显著,适合冗余机械臂的工作空间分析<sup>[12]</sup>。首先根据几何关系,推导各个关节位置关系如下:

$$x_i = x_{i-1} + l_{i-1} \cos \theta_{i-1}, \quad (1)$$

$$y_i = y_{i-1} + l_{i-1} \sin \theta_{i-1}. \quad (2)$$

其中,  $p_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1})$ ,  $p_i(x_i, y_i)$  分别表示模块  $i - 1$  的前后两个关节的位置坐标,  $\theta_i$  为连杆  $i$  和连杆  $i - 1$  的相对转角,通过式(1)、(2)即可迭代求出末端执行器的平面位置。在关节角度运动范围内取样点个数为 2 000,图 2 给出末端执行器的可达运动区域。其规则有效区域约为  $100 \times 40 \text{ cm}^2$  的平面区域。

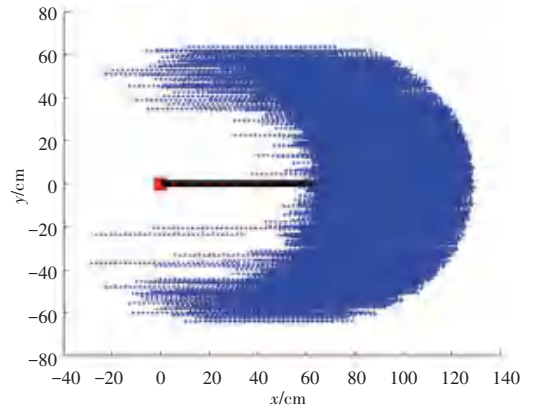


图 2 蛇形机械臂可达运动空间

Fig. 2 Workspace of the serpentine arm

## 2 移动冗余机械臂末端跟随算法设计

本文提出的几何分析方法进行的运动学逆解就是根据机械臂的目标位置,将该目标点作为机械臂末端的更新位置,在满足连杆长度的前提下确定前一时刻关节更新位置,以此类推实现多个关节的位置更新<sup>[13]</sup>。在该方法中所选择的关节更新策略不同,就会得到不同的运动轨迹。下面针对本文所采用 2 种跟踪方法设计实施步骤,拟展开研究详述如下。

### 2.1 方法 1: 关节在连线上更新策略

保证后一时刻更新的关节在其前一时刻和移动后的关节的连线上。如图 3 所示,前一时刻机械臂的位置为黑色实线,关节更新后的机械臂位置以红色实线表示。前一时刻的关节分别为  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$  ( $p_1$  为基座),当末端执行机构  $p_5$  移动到目标点  $p_i$  时,后面的关节也依次更新,分别更新为  $p'_1, p'_2, p'_3, p'_4, p'_5$ 。

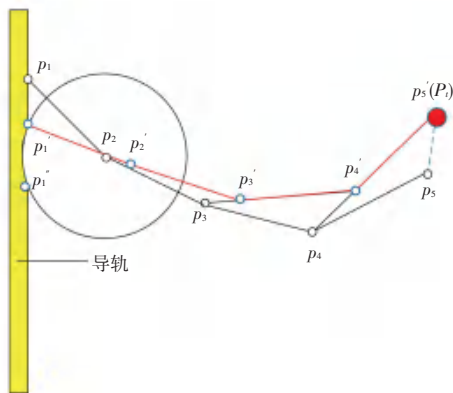


图3 关节在线上更新示意图

Fig. 3 Schematic diagram of joints updated on the line

更新准则为:当执行机构  $p_5$  移动到目标点  $p'_5(p_i)$  时,  $p'_4$  落在  $p_4 p'_5$  的连线上,后面关节更新依此类推。当更新到基座位置时,由于机械臂为移动机械臂,因此,基座的更新方法为:以相邻关节为圆心,机械臂长度为半径画圆,与导轨相交处即为基座的更新位置。从图3可以看出圆与导轨相交有2个点分别为  $p'_1, p''_1$ 。  $p_1$  的坐标为  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_i, y_i)$  分别是  $p'_1$  和  $p''_1$  的坐标,取其距离与  $p_1$  最近点为基座更新点。此处将用到如下数学公式:

$$D_{\min} = \sqrt{(x_1 - x_i)^2 + (y_1 - y_i)^2}, \quad (3)$$

关节位置的确定以  $p'_4$  关节为例:目标点  $p_i$  和前一时刻  $p_4$  位置点已知分别为  $(x_5, y_5)$ ,  $(x_4, y_4)$ 。

如图4所示,利用向量之间的关系求解关节点  $p'_4$  坐标,已知  $\vec{u} = (x_4, y_4)$ ,  $\vec{v} = (x_5, y_5)$  令  $\vec{p_4 p_5} = \vec{w}$ ,  $\vec{p_4 p'_5} = \lambda \vec{w}$ , 研究推得数学公式可表示为:

$$\vec{w} = \vec{v} - \vec{u} = (x_5 - x_4, y_5 - y_4), \quad (4)$$

$$\lambda \vec{w} = \lambda(\vec{v} - \vec{u}) = \lambda(x_5 - x_4, y_5 - y_4), \quad (5)$$

由于杆长取值为5 cm,则:

$$|\lambda| \|\vec{v} - \vec{u}\| = 5 \quad \lambda \in (0, 1), \quad (6)$$

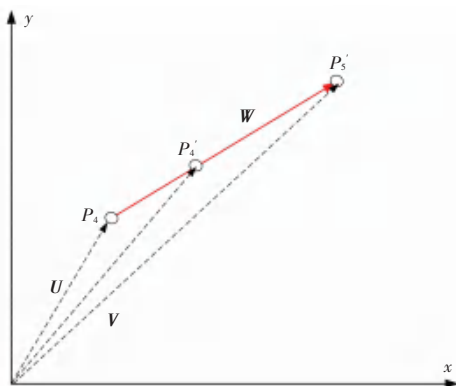


图4 关节点坐标求解

Fig. 4 Joint point coordinate solution

通过式(6)可以求解出  $\lambda$  的取值,将  $\lambda$  带入式(5),可以求解出  $\vec{p_4 p'_5}$ , 故而推得  $p'_4$  为:

$$\vec{p_4 p'_5} = \vec{v} - \lambda \vec{w}. \quad (7)$$

通过式(7),即可得到  $p'_4$  具体坐标位置。

## 2.2 方法2:关节在轴线上的更新策略

保证关节落在相应机械臂的轴线上,如图5所示,前一时刻机械臂的位置为黑色实线,关节更新后的机械臂位置以红色实线表示。前一时刻的关节分别为  $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$  ( $p_1$  为基座),当末端执行机构  $p_5$  移动到目标点  $p_i$  时,后面的关节也依次更新,分别更新为  $p'_1, p'_2, p'_3, p'_4, p'_5$ 。

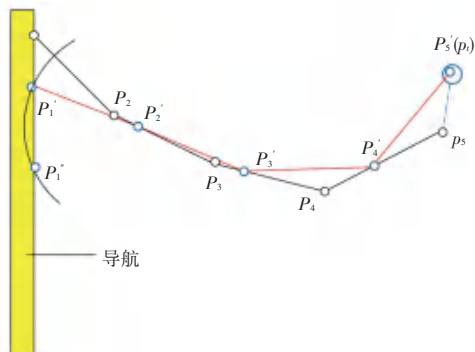


图5 关节在连杆上更新示意图

Fig. 5 Schematic diagram of the joint update on the axis

同样,以  $p'_4$  为例求更新后关节的具体位置,设定  $\vec{op_4} = \vec{v}$ ,  $\vec{op_5} = \vec{u}$ ,  $\vec{p_5 p_5'} = \vec{\alpha}$ ,  $\vec{p_4 p_5} = \vec{w}$ , 则有:

$$\vec{p_4 p_5'} = \vec{w} = \vec{u} - \vec{v}, \quad (8)$$

由此推得,  $\vec{p_4 p_5'} = \lambda \vec{w}$ , 因为杆长为5 cm,则:

$$\|\lambda \vec{w} + \vec{\alpha}\| = l_e = 5, \quad (9)$$

其中,  $\lambda \in (0, 1)$  通过式(9),可以求出  $\lambda$  的值。则其位置可由下式确定:

$$\vec{op_4'} = \vec{u} - \lambda \vec{w}. \quad (10)$$

进而,通过式(10)可以求解出  $p'_4$  的坐标。

## 3 原理分析及实验比较

### 3.1 能耗计算

机械臂关节转动需要消耗关节电机的转动动能,同时机械臂连杆位置的改变需要克服自身重量的势能变化,因此机械臂运动过程所消耗的能量包括重力势能和转动动能。下面给出理论上机械臂运动的能量推导过程。如图6所示,图中  $h_1, h_2, h_3$  分别对应机械臂的某一连杆的初始位置、方法2和方法1更新后位置的重心高度。

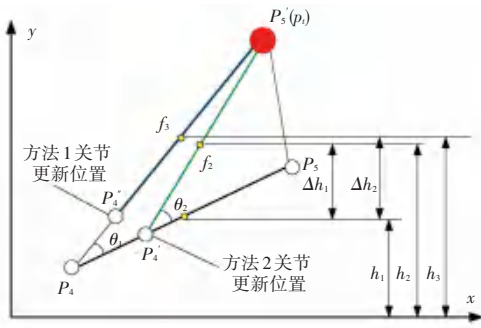


图 6 做功原理示意图

Fig. 6 Schematic diagram of work principle

以末端机械臂为例,第一种方法关节更新位置为  $p_4'$ , 此时机械臂的重心由  $f_1 \rightarrow f_3$ , 第二种方法关节更新位置为  $p_4$ , 此时机械臂的重心由  $f_1 \rightarrow f_2$ , 该连杆一步更新后总的做功计算公式为:

$$w_1 = M |\theta_1| + mg\Delta h_2 = M |\theta_1| + mg(h_3 - h_1), \quad (11)$$

$$w_2 = M |\theta_2| + mg\Delta h_1 = M |\theta_2| + mg(h_2 - h_1), \quad (12)$$

由于  $w_1, w_2$  无法解析求解,需要调用数值模拟计算,通过实验数据来验证 2 种方法的能耗结果。

由于机械臂的运动为反复运动,整个过程中重力做功可以部分抵消,因此这里忽略重力做功。再者由于机械臂的各个关节的输出力矩是变化的,在没有进行动力学分析情况下,采用关节角度改变的多少间接衡量 2 种关节更新策略的优劣。其定义为:

$$\Theta = \int_{s=0}^{s=l} \sum_{i=1}^n |\theta_i| ds. \quad (13)$$

其中,  $l$  为机械臂移动的路程;  $n$  为机械臂关节个数;  $s$  为机械臂沿着目标轨迹移动的距离;  $\Theta$  为完成运动轨迹过程中,机械臂所有关节角度变化绝对值的和,该指标能间接地反映出机械臂关节的总的移动范围和所消耗的能量。

### 3.2 实验仿真图

仿真为机械臂在同一平面内走出一个半径为 8 cm 的圆,分别用上述 2 种关节更新方法展示执行效果。运动跟踪过程分 10 跟踪阶段完成。图 7 和图 8 给出轨迹跟踪过程中机械臂在每一阶段下的状态结果。

在只要求末端执行器跟踪目标轨迹的前提下,可以看出方法 1 的运动轨迹保证了末端关节直接接近目标,而其余关节的位置则脱离目标轨迹,缩短了非末端关节的中间移动距离,因此该方法达到总体

上较短的跟踪路径;而方法 2 的运动轨迹各个关节更接近于实际轨迹,前端关节趋向于跟随末端关节的运动,机械臂的运动轨迹更光滑,机械臂各个关节相对于前一关节的相对转角变化不大,机械臂整体的位置的移动距离变大。

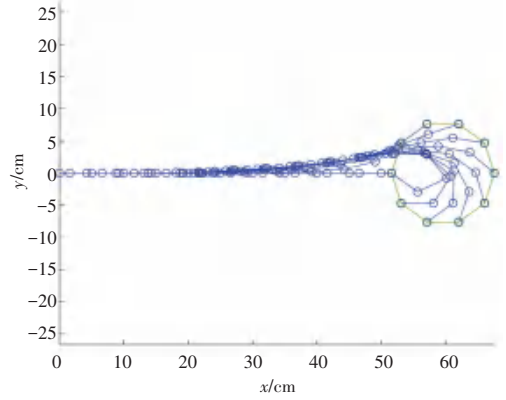


图 7 关节在连线上的轨迹跟踪效果

Fig. 7 Trajectory tracking effect of joints on the line

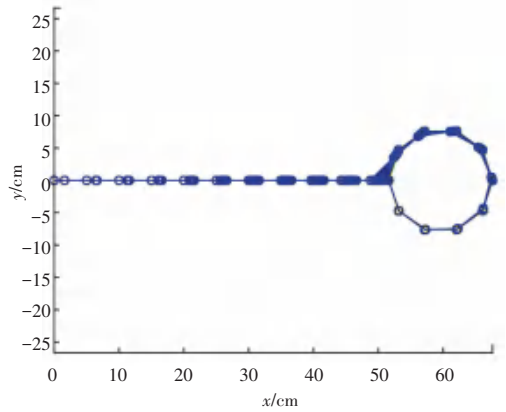


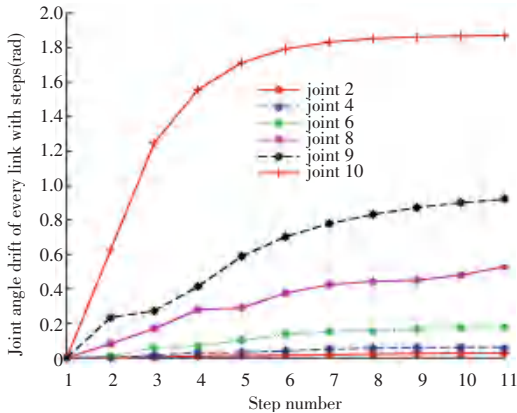
图 8 关节在轴线上轨迹跟踪效果

Fig. 8 Track tracking effect of the joint on the axis

方法 1 的能量消耗变化详见图 9。从图 9(a) 可以看出,随着关节号的增加(关节 1 与基座相连,关节 10 为末端),关节转动的角度位置显著增加,距离基座越近,关节运动范围越小。从图 9(b) 可以看出,关节转动角度大小随向前的运动距离增加而增加(step1 为第一阶段,step11 为跟踪的最后阶段)。通过公式(13)计算,在运行整个轨迹后,机械臂的各个关节总的关节转动范围为 4.128 5 rad。

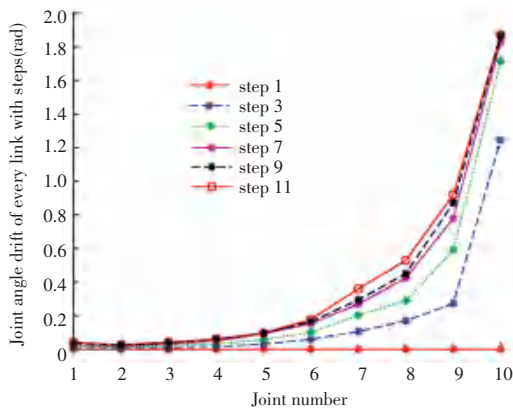
同时,研究又得到方法 2 的能量消耗变化详见图 10。从图 10(a) 可以看出,随着关节号的增加,关节转动的角度位置显著增加,在跟踪最初阶段距离基座越近,关节只有移动没有转动,例如关节 2 是在第 9 步开始转动运动,关节 4 是在第 7 步开始转动运动。当跟踪到稳定阶段,各个关节达到相同的运

动范围。从图 10(b)可以看出,每条线表示运动到该步后,各个关节总的转动范围。关节转动角度大小随向前的运动距离增加而增加。在第 11 步,各个关节的运动范围达到最大。通过公式(13)计算,在运行整个轨迹后,机械臂的各个关节总的关节转动范围为 18rad,相比方法 1,方法 2 的关节总的移动范围增加。



(a) 各个关节在跟踪的每个阶段关节角度偏移的总和

(a) The sum of the joint angular offsets of each joint at each stage of the tracking



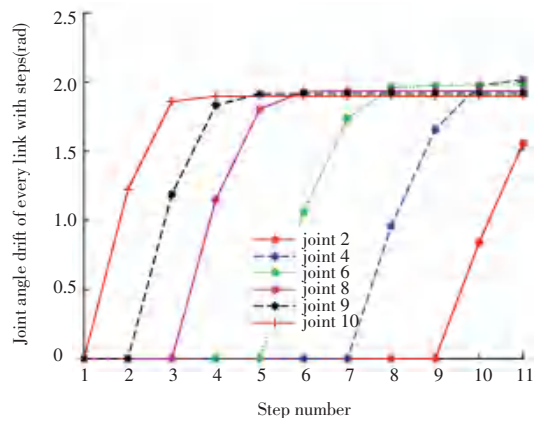
(b) 每个跟踪阶段各个关节的转角偏移总和

(b) Sum of the angular offset of each joint for each tracking phase

图 9 方法 1 的能量消耗图

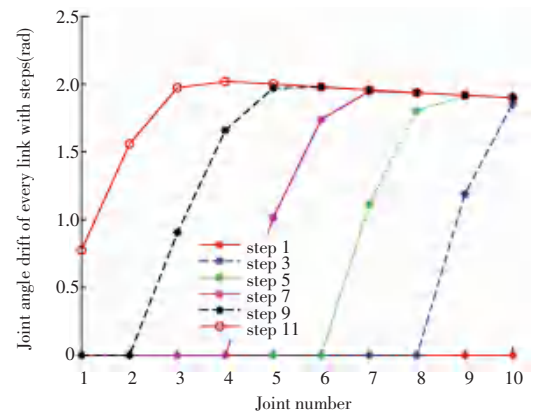
Fig. 9 Energy consumption of method 1

比较图 9(a) 和图 10(a) 可以看出,采用方法 1 在跟踪的每一阶段,各个关节都在运动,距离基座近的关节运动幅度小。采用方法 2 时,初始是部分关节转动,距离基座近的关节只有平移。当跟踪到稳定阶段,各个关节达到相同的运动范围,可以看出各个关节的末端跟随的效应。比较图 9(b) 和图 10(b) 的同一运动阶段具有可比性,例如在共同跟踪最后阶段的 step11 可以看出,方法 1 的各个关节角度移动范围依次减小,而方法 2 的各个关节角度移动范围基本相等。



(a) 各个关节在跟踪的每个阶段关节角度偏移的总和

(a) The sum of the joint angular offsets of each joint at each stage of the tracking



(b) 每个跟踪阶段各个关节的转角偏移总和

(b) Sum of the angular offset of each joint for each tracking phase

图 10 方法 2 的能量消耗图

Fig. 10 Energy consumption of method 2

综上所述,可知方法 1 具有关节移动范围小,移动距离短的特点。方法 2 各个关节都具有相似的运动轨迹,其末端跟随效果更好。

## 4 结束语

本文给出基于几何方法的超冗余机械臂逆运动学快速求解算法,并分析了 2 种关节位置更新策略的能耗。在本研究中,方法 1 为“关节在连线上”,方法 2 为“关节在轴线上”。通过控制末端跟随同一目标运动,从能耗和运动平稳性两个角度来比较 2 种几何方法的优劣。在此基础上,进一步分析后可知,2 种方法都可以实现超冗余度机器人逆运动学的快速求解,实际应用中可根据任务要求选择相应的关节更新策略。

## 参考文献

- [1] ANGELES J. Fundamentals of robot mechanical systems; theory, methods, and algorithms [M]. 2<sup>nd</sup> ed. New York: Springer, 2003.