

李宏岩, 朱雪峰, 霍晔, 等. 改进的 SPH 方法的精度问题研究[J]. 智能计算机与应用, 2024, 14(7): 190-197. DOI:10.20169/j.issn.2095-2163.240730

改进的 SPH 方法的精度问题研究

李宏岩, 朱雪峰, 霍晔, 曹东旭, 孙琳, 姜元波, 李斌

(辽沈工业集团有限公司, 沈阳 110045)

摘要: 传统的 SPH 方法不能很好的模拟流体的运动状态, 其原因是核函数的边界截断导致流体边界处的精度较低, 很难得到收敛和精确的结果。而 DSPH、KGF-SPH 和 FPM-SPH 作为改进的 SPH 方法, 具有较高的计算精度。通过常函数、线性函数等拟合验证传统的 SPH 方法和改进的 SPH 方法的零阶一致性和一阶一致性。通过溃坝问题和方形液滴震荡两个经典算例验证改进的 SPH 方法的精度问题。结果显示, 改进的 SPH 方法能够达到一阶一致性, 改进的 SPH 方法模拟效果良好, 进一步证实了改进的 SPH 方法能够有效地提高模拟的计算精度和数值稳定性。

关键词: 核函数; SPH; 溃坝; 液滴震荡; 一阶一致性

中图分类号: TP301.6

文献标志码: A

文章编号: 2095-2163(2024)07-0190-08

Research on the accuracy of improved SPH method

LI Hongyan, ZHU Xuefeng, HUO Ye, CAO Dongxu, SUN Lin, JIANG Yuanbo, LI Bin

(Liao Shen Industries Group Co., Ltd, Shenyang 110045, China)

Abstract: The traditional SPH method cannot simulate the motion state of the fluid well, because the boundary truncation of the kernel function leads to low precision at the fluid boundary, and it is difficult to get convergence and accurate results. As improved SPH methods, DSPH, KGF-SPH and PFM-SPH have higher calculation accuracy. The zero-order consistency and first-order consistency of the traditional SPH method and the improved SPH method are verified by constant function and linear function, and the accuracy of the improved SPH method is verified by two classical examples of the square droplet oscillates and dam break. The improved SPH method has good simulation results, which further proves that the improved SPH method can effectively improve the calculation accuracy and numerical stability of the simulation.

Key words: kernel function; SPH; dam failure; droplet oscillations; first-order consistency

0 引言

计算流体动力学是一种包含流体力学、数值分析、运动学和动力学等领域的交叉学科, 通过使用质量守恒方程、动量守恒方程和能量守恒方程对数学模型进行求解^[1]。有限元方法、有限差分法和有限体积法等是计算流体动力学常见的方法, 将求解域划分为若干个网格, 计算网格节点上的数值, 这些方法的弊端是忽略了网格内部数值的变化, 很难精确得到运动物质的交界面。当材料发生极大变形或运动时, 如爆炸、冲击等, 有的方法会发生网格畸变等

情况^[2]。光滑粒子流体动力学方法 (SPH) 的无网格粒子特性能够改善上述问题。

SPH 是一种求解大变形、动边界和强对流的拉格朗日型无网格粒子法, 已被广泛应用于液 (气) 体流动、爆炸、冲击等数值模拟。SPH 最初被提出是用于解决三维开放空间的天体物理学问题, Lucy 和 Gingold^[3-4] 对离散的行星进行了模拟。近年来, 无网格粒子方法被广泛应用于天体物理学、固体力学、流体力学、电磁学等许多领域的不同问题。由于粒子的集体运动类似于液体或气体流动的运动, 可以用经典牛顿流体动力学的控制方程来建模。SPH

作者简介: 李宏岩 (1995-), 男, 学士, 工程师, 主要研究方向: 弹箭总装总调; 朱雪峰 (1983-), 男, 学士, 工程师, 主要研究方向: 塑性成形技术; 霍晔 (1994-), 男, 硕士, 工程师, 主要研究方向: 数值分析; 曹东旭 (1991-), 男, 学士, 工程师, 主要研究方向: 先进制造技术; 孙琳 (1992-), 女, 学士, 工程师, 主要研究方向: 机械加工; 姜元波 (1997-), 男, 硕士, 助理工程师, 主要研究方向: 数值仿真; 李斌 (1990-), 男, 学士, 工程师, 主要研究方向: 工、职代会机制流程优化研究。

收稿日期: 2023-12-07

哈尔滨工业大学主办 ◆ 科技创新与应用

作为一种较新的计算方法,结合了无网格法、拉格朗日法和粒子法的优点,可以很容易地模拟具有自由表面的流体或固体问题,如溃坝、楔形物和圆柱体的入水、圆柱体的出水、液体晃动、土壤行为和爆炸焊接等。张永祥等^[5]采用 SPH 方法来求解二维浅水方程,通过设立守恒元和解元,提出一种新的数值模拟方法,用该方法计算得到的全溃的溃坝洪水波的数值解和理论解与文献中的实验值符合的较好;杨志国等^[6]将 GPU 技术应用到 SPH 方法中,通过二维溃坝问题,验证了 GPU 在 SPH 方法中的适用性和高效性;Kim B 等^[7]使用 SPH 方法解决了多相流体模拟的问题,并建议使用区域水平集(RLS),因为其适用于多种不相溶材料的模拟;Yang C 等^[8]基于 SPH 方法提出了一种新颖的数据驱动投影方法,大大加快了计算速度;Monaghan J J^[9]将 SPH 方法推广到处理自由表面不可压缩流动,该方法易于使用,并将其应用于溃坝、钻孔、造波器的模拟以及波浪向海滩传播的实例;Liu M B 等^[10]提出了一种一维 SPH 公式,用于模拟与不连续现象相关的冲击波;Solenthaler B 等^[11]提出了一种基于拉格朗日平滑粒子流体力学(SPH)模型的新型不可压缩流体模拟方法,成功应用在圆柱体入水等算例;Yang M 等^[12]针对(SPH)提出了一种新的表面张力计算方法,用于模拟界面流体流动;Yan Z 等^[13]提出了一种改进的基于位置的流体模拟模型,该模型继承了基于位置的动力学方法(PBD)的稳定性和 SPH 的平滑性,提高了计算精度和模拟效果;刘梅娥等^[14]根据 SPH 方法的原理,提出了一套模拟流体自由表面流动的方法,完全消除了数值扩散和自由表面模糊问题,可以模拟飞溅,融合等复杂自由表面现象。Jeong S H

等^[15]提出了一种基于机器学习的新方法,该方法将基于物理的流体模拟表述为一个回归问题,基于 SPH 方法大大提高了模拟效率;Jeschke S 等^[16]提出了一种高效的波前跟踪算法,联合 SPH 方法能够有效模拟波浪的运动和特性;Misztal M K 等^[17]介绍了一种利用非结构移动网格制作不相溶流体多相流动的方法,基于 SPH 方法可提高模拟质量。

SPH 方法以粒子作为计算框架,基于核近似理论,通过粒子近似方法对控制方程进行离散求解。如图 1 所示,在一维情况 SPH 粒子近似时,光滑函数被边界截断或支持域内粒子分布不规则情况下,离散求和后引入数值误差,这也是限制该方法进一步发展的主要因素之一。因此专家学者提出不同的技术来恢复粒子一致性,间断的光滑粒子流体力学方法(DSPH)、有限粒子法(FPM-SPH)和无核梯度方法(KGF-SPH)是比较著名的几种方法,基于泰勒级数展开公式,在每个计算时间步内,对系统中插值点的校正矩阵求逆,通过保留一阶导数值来逼近任意分布的粒子的场函数及导数。Fang J 等^[18]介绍了用于粘性流体自由表面流数值模拟的平滑粒子流体力学(SPH)方法的两个增强变体,通过在基于能量的框架下推导出一组新的通用离散 SPH 类方程,并对函数导数采用修正(高阶)或耦合粒子近似方案实现了改进;Achim C V 等^[19]引入了半解耦有限粒子法(SDFPM)和修正半解耦有限粒子法(CSDFPM),通过评估圆柱形障碍物周围和圆柱形孔周围场的梯度分量验证了提出的方法的精度;Solenthaler B 等^[20]提出了一种基于 SPH 的计算方法,与标准 SPH 相比,可以在不增加计算成本的情况下正确处理多种流体界面上的密度不连续性。

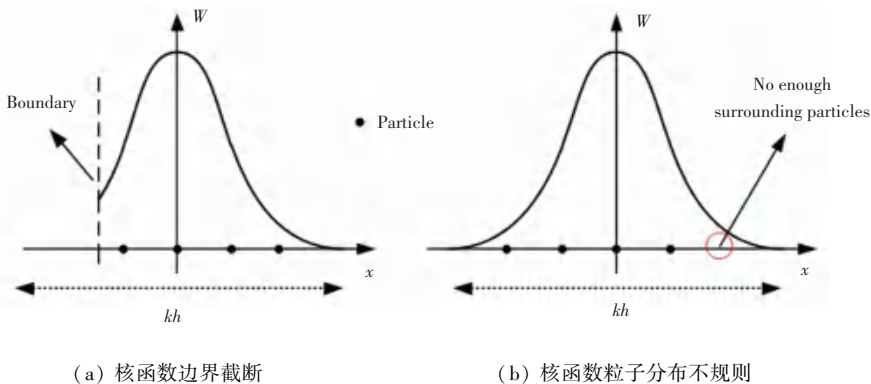


图 1 一维情况 SPH 粒子近似

Fig. 1 SPH particle approximation in one-dimensional case

本文研究传统的 SPH 方法和一些改进的 SPH 方法,包括间断的光滑粒子流体动力学方法(DSPH)、有限粒子法(FPM-SPH)和无核梯度 SPH 方法(KGF-SPH),使用改进的 SPH 方法(FPM-SPH)实现固体冲击和溃坝的细节模拟。

1 理论方法

1.1 传统的 SPH 方法

在流体动力学领域,根据纳维-斯托克斯(N-S)方程,将流场系统离散为若干个粒子,这些粒子附有各自的物理属性,如密度、质量、压力、速度、加速度等^[3]。传统 SPH 方法的核心思想包括核近似原理和粒子近似原理。在核近似理论中,引入核函数 W 描述粒子之间的相互作用。任意的连续函数 $f(r)$ 及其导数 $\tilde{N}f(r)$, 式(1)和式(2):

$$f(r) = \int_{\Omega} f(r') W(r - r', h) dr' \quad (1)$$

$$\tilde{N}f(r) = \int_{\Omega} f(r') \tilde{N}_r W(r - r', h) dr' \quad (2)$$

其中, Ω 表示问题域; h 是定义核函数 W 支持域的光滑长度; \tilde{N}_r 表示相对位置 r 的梯度。

传统 SPH 方法,粒子 i 的函数值及其导数可由支持域内其他粒子插值得到,式(3)和式(4):

$$f(r_i) = \sum_{j=1}^N f(r_j) W(r_i - r_j, h) \frac{m_j}{\rho_j} \quad (3)$$

$$\tilde{N}f(r_i) = \sum_{j=1}^N f(r_j) \tilde{N}_i W(r_i - r_j, h) \frac{m_j}{\rho_j} \quad (4)$$

其中,下标 i 和 j 为粒子编号; N 为粒子 i 处支持域内的粒子总数; m_j 和 ρ_j 分别为粒子 j 的质量和密度。

核函数 W 的选择关系到整个数值模拟的精度、效率和稳定性,所以在选取核函数时,应满足近似狄拉克 δ 函数条件(式(5))和具备较大的中心峰值,从而提高近似精度。

$$\delta(r - r') = \begin{cases} 1 & r = r' \\ 0 & r \neq r' \end{cases} \quad (5)$$

目前,广泛使用的核函数有三次样条核函数、分段四次核函数和高斯核函数等。

三次样条核函数表示为式(6):

$$W(r - r', h) = \alpha_d \begin{cases} \frac{2}{3} - R^2 + \frac{1}{2} R^3, & 0 \leq R < 1 \\ \frac{1}{6} (2 - R)^3, & 1 \leq R < 2 \\ 0, & R \geq 2 \end{cases} \quad (6)$$

其中, $R = r/h$ 为点 r 和点 r' 处两粒子间相对距离; α_d 为核函数系数,在一维、二维和三维空间中分别有 $\alpha_d = 1/h, 15/7\pi h^2$ 和 $3/2\pi h^3$ 。

分段四次核函数表示为式(7),在一维、二维和三维空间中分别有 $\alpha_d = 1/120h, 7/748\pi h^2$ 和 $1/120\pi h^3$ 。

$$W(r - r', h) = \begin{cases} (3 - R)^5 - 6(2 - R)^5 + 15(1 - R)^5, & 0 \leq R < 1 \\ (3 - R)^5 - 6(2 - R)^5, & 1 \leq R < 2 \\ (3 - R)^5, & 2 \leq R < 3 \\ 0, & R \geq 3 \end{cases} \quad (7)$$

高斯核函数表示为式(8):

$$W(r - r', h) = \alpha_d \exp(-R^2) \quad (8)$$

其中, $\alpha_d = 1/\pi^{(dim/2)} h^{dim}$ ($dim = 1, 2, 3$), dim 为维度。

1.2 FPM-SPH 方法

FPM-SPH 方法结合了 DSPH 和 FPM 两种方法,既有 DSPH 处理间断函数的优点,又有 FPM 方法精度高的特点。如图 2 所示,在一维非连续函数的核近似中,粒子 r_i 的支持域为 $[a, b]$, d 处为间断点,函数 $f(r)$ 在 d 点处的积分是非连续的。在整个支持域上,函数 $f(r)$ 与核函数乘积的积分可以分为以下两部分,式(9):

$$\int_a^b f(r) W_i(r) dr = \int_a^d f(r) W_i(r) dr + \int_d^b f(r) W_i(r) dr \quad (9)$$

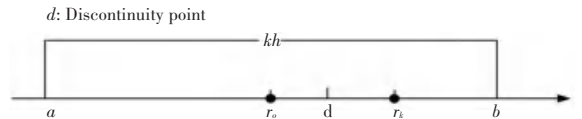


图2 一维非连续函数核近似

Fig. 2 One-dimensional discontinuous function kernel approximation

利用泰勒级数展开公式(10),保留一阶导数,按照公式(9)的形式,将公式(10)两边光滑函数,在计算域上积分得到公式(11):

$$f(r) = f(r_i) + \tilde{N}f(r_i)(r - r_i) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(r) W_i(r) dr &= f(r_i) \int_a^b f(r) W_i(r) dr + \\ & [f(r_k) - f(r_i)] \int_a^b W_i(r) dr + \\ & \tilde{N}f(r_i) \int_a^d (r - r_i) W_i(r) dr + \\ & \int_a^b [\tilde{N}f(r_k)(r - r_k) - \tilde{N}f(r_i)(r - r_i)] W_i(r) dr \end{aligned} \quad (11)$$

联立求解公式(10)和(11),可得矩阵方程(12):

$$\begin{pmatrix} \hat{e} \\ \hat{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(r_i) \\ \tilde{N}f(r_i) \end{pmatrix} \dot{U} = L^{-1} \begin{pmatrix} \hat{e} T_1 \\ \hat{e} T_2 \end{pmatrix} \dot{U} \quad (12)$$

其中,

$$T_1 = \int_a^b f(r) W_i(r) dr - [f(r_k) - f(r_i)] \int_d^b W_i(r) dr - \int_d^b [(r - r_k) \tilde{N}f(r_k) - (r - r_i) \tilde{N}f(r_i)] W_i(r) dr \quad (13)$$

$$T_2 = \int_a^b f(r) \tilde{N}W_i(r) dr - [f(r_k) - f(r_i)] \int_d^b \tilde{N}W_i(r) dr - \int_d^b [(r - r_k) \tilde{N}f(r_k) - (r - r_i) \tilde{N}f(r_i)] \tilde{N}W_i(r) dr \quad (14)$$

校正矩阵 L , 式(15):

$$L = \begin{pmatrix} \hat{e} \int_a^b W_i(r) dr & \int_a^b (r - r_i) W_i(r) dr \\ \hat{e} \int_a^b \tilde{N}W_i(r) dr & \int_a^b (r - r_i) \tilde{N}W_i(r) dr \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{U} \end{pmatrix} \quad (15)$$

1.3 KGF-DSPH 方法

在本方法中,整个模拟过程不需要使用核梯度。将公式(10)两边乘以 $W_i(r)$ 和 $(r - r_i) W_i(r)$, 在计算域上积分得到式(16):

$$\begin{pmatrix} \hat{e} \\ \hat{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(r_i) \\ \tilde{N}f(r_i) \end{pmatrix} \dot{U} = L^{-1} \begin{pmatrix} \hat{e} T_1 \\ \hat{e} T_2 \end{pmatrix} \dot{U} \quad (16)$$

其中,

$$T_1 = \int_a^b f(r) W_i(r) dr - [f(r_k) - f(r_i)] \int_d^b W_i(r) dr - \int_d^b [(r - r_k) \tilde{N}f(r_k) - (r - r_i) \tilde{N}f(r_i)] W_i(r) dr$$

$$T_2 = \int_a^b f(r) (r - r_i) W_i(r) dr - [f(r_k) - f(r_i)] \int_d^b (r - r_i) W_i(r) dr - \int_d^b [(r - r_k) \tilde{N}f(r_k) - (r - r_i) \tilde{N}f(r_i)] (r - r_i) W_i(r) dr$$

校正矩阵 L , 式(17):

$$L = \begin{pmatrix} \hat{e} \int_a^b W_i(r) dr & \int_a^b (r - r_i) W_i(r) dr \\ \hat{e} \int_a^b (r - r_i) W_i(r) dr & \int_a^b (r - r_i)^2 W_i(r) dr \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{U} \end{pmatrix} \quad (17)$$

2 一致性验证

本文使用传统 SPH、DSPH、FPM-SPH、KGF-SPH 进行数值分析。以常函数和线性函数为例,在一维情况下,分析不同条件即光滑长度、粒子分布对

近似精度的影响。

2.1 零阶一致性 (C^0)

零阶一致性表现为重现或逼近常函数的能力。本文常函数设定为公式(18),根据粒子分布分为两种情况进行讨论:(1)均匀分布;(2)非均匀分布。

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 0.5 \\ 2, & 0.5 \leq x \leq 1.0 \end{cases} \quad (18)$$

2.1.1 均匀分布

在定义域 $[0,1]$ 中,均匀分布 10 个粒子,粒子间距为 $\Delta x = 0.1$,如图 3 所示。粒子均匀分布情况下,使用三次样条核函数、光滑长度 $h = 1.0\Delta x, h = 1.2\Delta x$, 函数及其导数的逼近结果如图 4 和图 5 所示。可以看出,传统 SPH 方法由于边界截断导致的核函数缺失问题,使得边界问题异常突出。当光滑长度增加时,边界附近的一些粒子的核函数也会被边界截断,导致近似结果出现偏差,在间断点处的函数及其导数值也与理论值存在较大的误差;DSPH 方法采用正则化方法对核近似式和粒子近似式进行了修正,解决了边界缺陷问题,但是在非连续函数间断点处,函数导数 $f(x)$ 与理论值偏差较大,且光滑长度的变化会影响近似结果;FPM-SPH 和 KGF-SPH 方法在常函数问题中,针对不同的光滑长度和粒子分布均匀,与理论值相同。

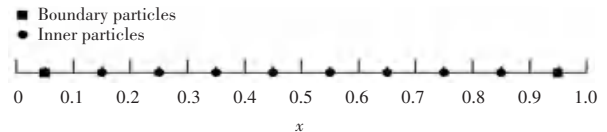


图 3 均匀分布粒子示意图

Fig. 3 Schematic diagram of evenly distributed particles

2.1.2 非均匀分布

非均匀分布的 10 个粒子位置如图 6 所示,定义域为 $[0,1]$, 初始粒子位置为 0.031 4, $\Delta x_1 = 0.062 8, \frac{\Delta x_{i+1}}{\Delta x_i} = 1.1$ 。粒子非均匀分布情况下,使用三次样条核函数、光滑长度在 $h = 1.0\Delta x, h = 1.2\Delta x$ 函数及其导数的逼近结果如图 7 和图 8 所示。可以看出,使用 FPM-SPH 和 KGF-SPH 方法,无论边界粒子还是内部粒子,均能精确地逼近常函数,光滑函数的选择对逼近结果无影响;使用 DSPH 方法时,间断点附近粒子函数及其导数与理论值存在偏差,且随着光滑函数的变化,与理论值之间的偏差也在变化。

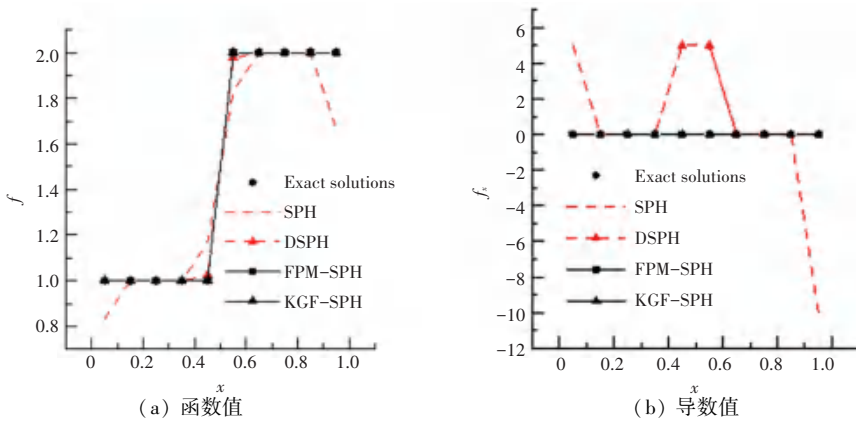


图4 均匀分布粒子 ($h=1.0\Delta x$) 近似结果和理论解

Fig. 4 Evenly distributed particles ($h=1.0\Delta x$) approximate results and theoretical solutions

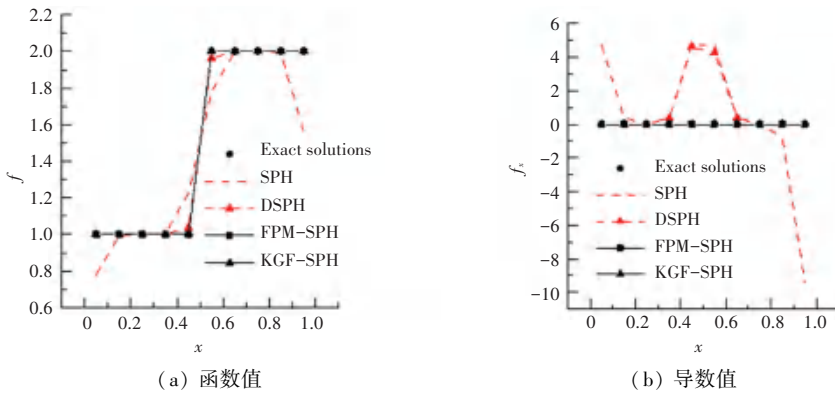


图5 均匀分布粒子 ($h=1.2\Delta x$) 近似结果和理论解

Fig. 5 Evenly distributed particles ($h=1.2\Delta x$) approximate results and theoretical solutions

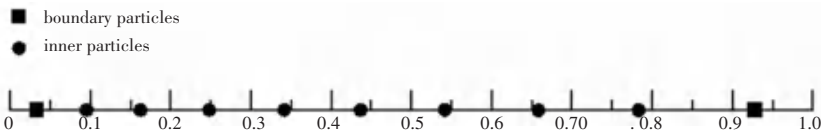


图6 非均匀分布粒子示意图

Fig. 6 Schematic diagram of non-uniformly distributed particles

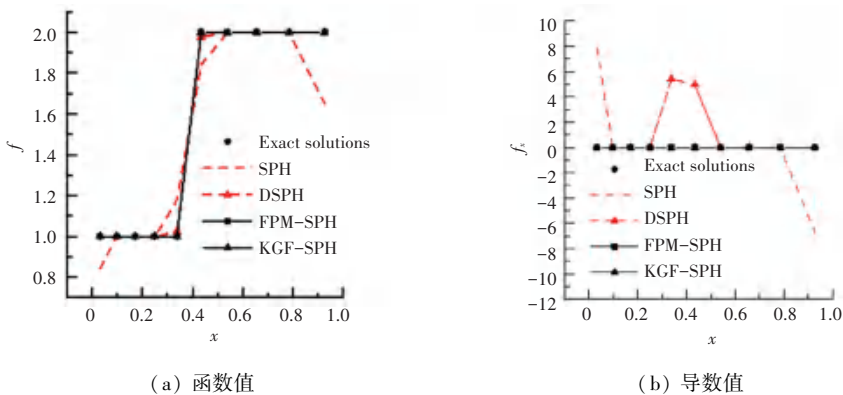


图7 非均匀分布粒子 ($h=1.0\Delta x$) 近似结果和理论解

Fig. 7 Approximate results and theoretical solutions of non-uniformly distributed particles ($h=1.0\Delta x$)

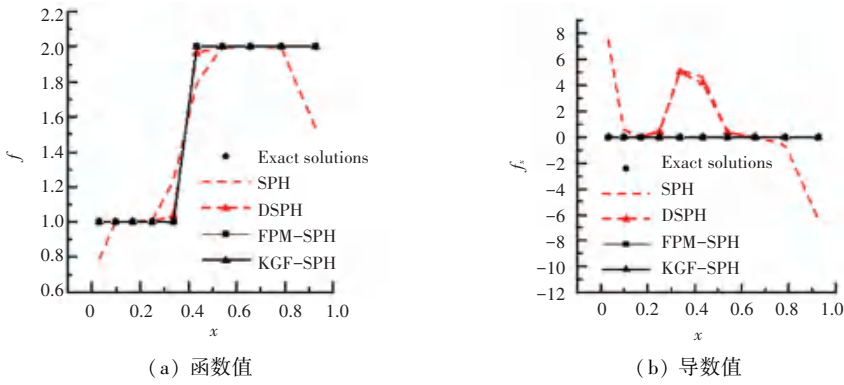


图 8 非均匀分布粒子 ($h=1.2\Delta x$) 近似结果和理论解

Fig. 8 Approximate results and theoretical solutions of non-uniformly distributed particles ($h=1.2\Delta x$)

2.2 一阶一致性 (C^1)

一阶一致性表现为重现或者逼近线性函数的能力。本文选取公式 (19) 为测试函数, 粒子位置、光滑长度、核函数等参数选择与零阶一致性相同。粒子分布也分为两种情况进行讨论: (1) 均匀分布; (2) 不均匀分布。

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 0.5 \\ 2x, & 0.5 \leq x \leq 1.0 \end{cases} \quad (19)$$

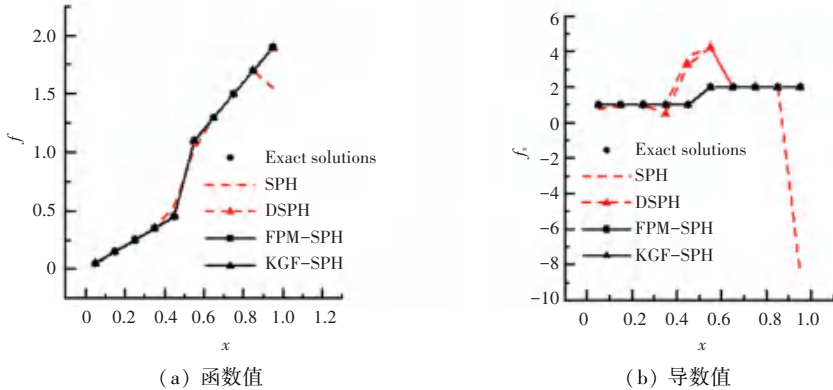


图 9 均匀分布粒子 ($h=1.0\Delta x$) 近似结果和理论解

Fig. 9 Approximate results and theoretical solutions of uniformly distributed particles ($h=1.0\Delta x$)

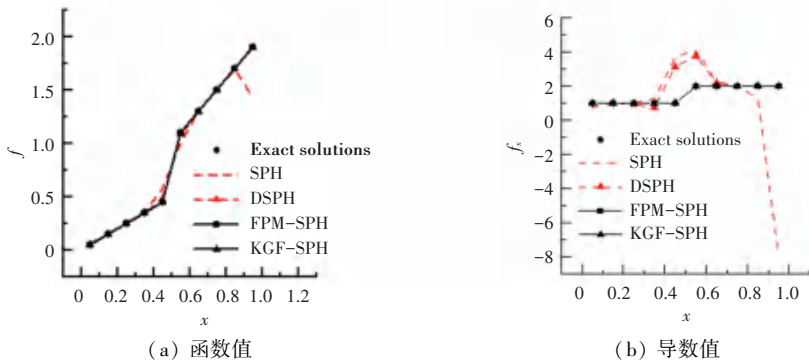


图 10 均匀分布粒子 ($h=1.2\Delta x$) 近似结果和理论解

Fig. 10 Approximate results and theoretical solutions of uniformly distributed particles ($h=1.2\Delta x$)

2.2.2 非均匀分布

粒子非均匀分布情况下, 使用三次样条核函数、

2.2.1 均匀分布

粒子均匀分布情况下, 使用三次样条核函数、光滑长度在 $h=1.0\Delta x, h=1.2\Delta x$ 函数及其导数的逼近结果如图 9 和图 10 所示。可以看出 FPM-SPH 和 KGF-SPH 与解析值相同, DSPH 方法相较于传统 SPH 精度较高, 但在间断点处依旧存在误差, 尤其是间断点附近的导数值。

光滑长度在 $h=1.0\Delta x, h=1.2\Delta x$ 函数及其导数的逼近结果如图 11 和图 12 所示。可见相较于粒子均匀

分布情况,传统 SPH 和 DSPH 方法边界点处函数及其导数误差范围更广,间断点的导数值误差较大;

FPM-SPH 和 KGF-SPH 方法能够准确的表示该函数。

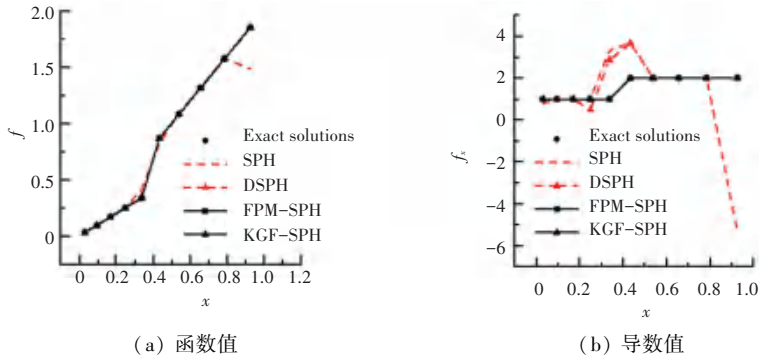


图 11 非均匀分布粒子 ($h = 1.0\Delta x$) 近似结果和理论解

Fig. 11 Approximate results and theoretical solutions of non-uniformly distributed particles ($h = 1.0\Delta x$)

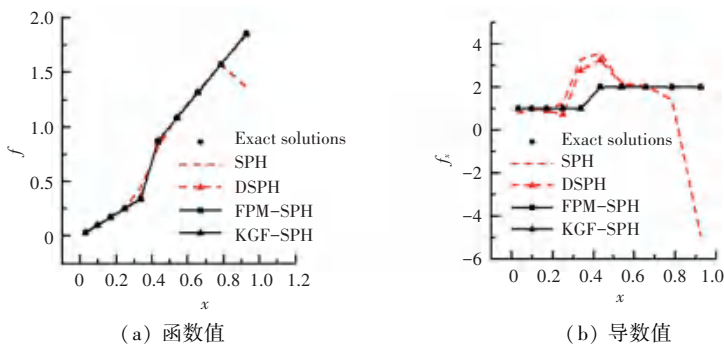


图 12 非均匀分布粒子 ($h = 1.2\Delta x$) 近似结果和理论解

Fig. 12 Approximate results and theoretical solutions of non-uniformly distributed particles ($h = 1.2\Delta x$)

3 数值仿真

3.1 溃坝算例

溃坝流动是一种经典的包含自由表面流动、大变形和动边界的算例。本文使用 FPM-SPH 方法进行模拟。模型为矩形槽,大小为 3.0×1.5 m,槽内装有 0.5×1.0 m 的水,水的密度为 $1\,000\text{ kg/m}^3$,动力粘度为 0.001 kg/(ms) 。使用 FPM-SPH 方法能够准确的模拟溃坝的全过程,且能够清晰的看到液滴飞溅状态如图 13 所示。

3.2 方形液滴演化

本文通过方形液滴演化这一经典算例验证 KGF-SPH 方法的准确性。方形液滴的边长为 1.0 mm ,液滴密度为 $1\,000\text{ kg/m}^3$,动力粘度为 0.001 kg/(ms) ,表面张力系数为 0.072 N/m 。方形液滴在经历一段时间的震荡后,动能动力粘性的作用下耗散到最低,方形液滴最终变为圆形液滴,液滴表面粒子的曲率也接近理论值 $1/R = 1\,772.5$,如图 14 所示,说明 KGF-SPH 方法能够准确的模拟方形液滴的变化。

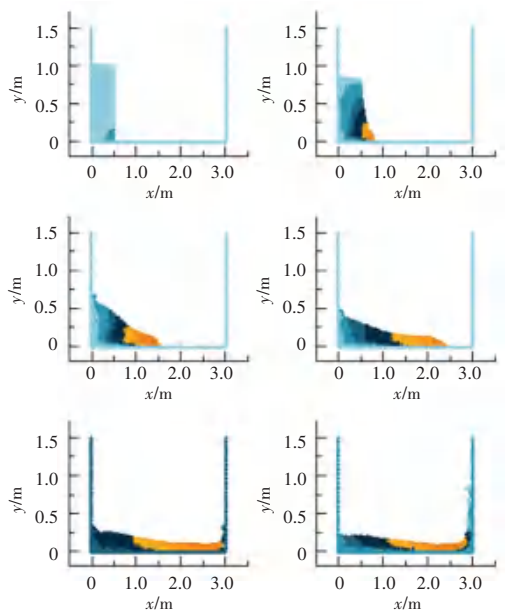


图 13 溃坝过程

Fig. 13 Process of dam break

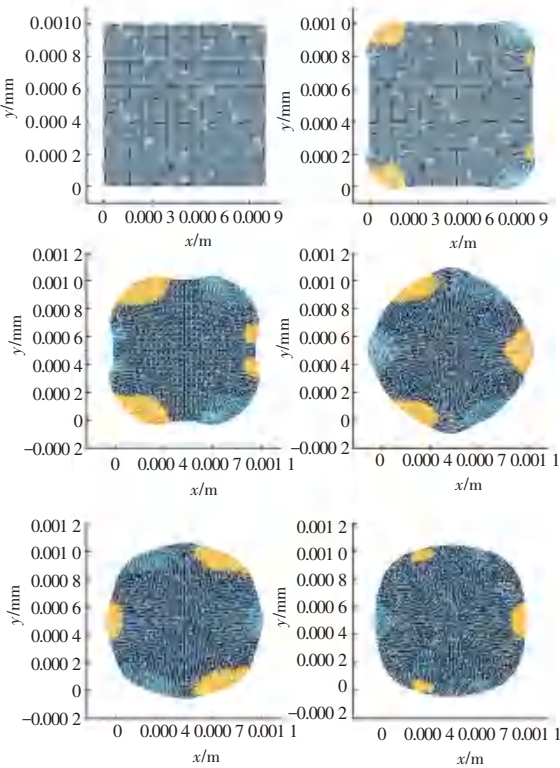


图 14 方形液滴震荡

Fig. 14 Square droplet oscillation

4 结束语

本文主要研究非连续函数情况下,传统 SPH 及改进的 SPH 粒子一致性问题,介绍了比较常见的光滑核函数。根据 DSPH、FPM、KGF-SPH 思想,FPM-SPH、KGF-SPH 方法能够有效地逼近常函数和线性函数,可以精准地恢复粒子的零阶、一阶一致性,提高近似精度。根据间断常函数和线性函数的数值测试,得出以下结论:

(1) 与传统 SPH 方法相比,FPM-SPH 和 KGF-SPH 边界粒子和间断点附近粒子能够达到零阶和一阶一致性,函数梯度与理论值一致;

(2) KGF-SPH 方法保留了 KGF-SPH 的优点,在整个计算过程中,不需要使用核梯度,有效地增加了核函数的选择范围;

(3) 在边界粒子满足一阶一致性前提下,相较于 DSPH 方法,FPM-SPH 和 KGF-SPH 间断点附近粒子函数及导数近似值与理论值一致,比 DSPH 有更高的精度。

参考文献

[1] 胡德安,韩旭,肖毅华,等.光滑粒子法及其与有限元耦合算法的研究进展[J].力学学报,2013,45(5):639-651.

[2] 华磊,曾兰玲,杨洋,等.基于 SPH 统一框架的流体细节仿真模拟方法[J].计算机与数字工程,2023,51(7):1489-1494,1616.

[3] LUCY L B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis[J]. *Astrophys Journal*, 1977, 82:1013-1024.

[4] GINGOLD R A, MONAGHAN J J. Smoothed particle hydrodynamics; theory and application to non-spherical stars[J]. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1977, 181(3):375-389.

[5] 张永祥,陈景秋.用守恒元和解元法数值模拟二维溃坝洪水波[J].水利学报,2005,36(10):1224-1229.

[6] 杨志国,黄兴,郑兴,等.GPU 在 SPH 方法模拟溃坝问题的应用研究[J].哈尔滨工程学报,2014,35(6):661-666.

[7] KIM B. Multi-phase fluid simulations using regional level sets[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2010, 29(6):175.

[8] YANG C, YANG X, XIAO X. Data-driven projection method in fluid simulation[J]. *Computer Animation and Virtual Worlds*, 2016, 27(3-4):415-424.

[9] MONAGHAN J J. Simulating free surface flows with SPH[J]. *Journal of Computational Physics*, 1994, 110(2):399-406.

[10] LIU M B, LIU G R, LAM K Y. A one-dimensional meshfree particle formulation for simulating shock waves[J]. *Shock Waves*, 2003, 13(3):201-211.

[11] SOLENTHALER B, PAJAROLA R. Density contrast SPH interfaces [C]//*Proceedings of the 2008 Eurographics Symposium*. IEEE, 2008, 211-218.

[12] YANG M, LI X, LIU Y, et al. A novel surface tension formulation for SPH fluid simulation[J]. *The Visual Computer*, 2016, 33(5):597-606.

[13] YAN Z, ZHU X, LIU Y, et al. An improved method of position based fluids[J]. *College Mathematics*, 2016, 32(1):38-43.

[14] 刘梅娥,周进雄.不可压流体自由表面流动的 SPH 数值模拟[J].机械工程学报,2004,40(3):5-9.

[15] JEONG S H, SKRIVAN T, MULLER-FISCHER M, et al. Water surface wavelets[J]. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2018, 37(4CD):1-13.

[16] JESCHKE S, WOJTAN C. Water wave animation via wave front parameter interpolation[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2015, 34(3):1-14.

[17] MISZTAL M K, ERLEBEN K, BARGTEIL A, et al. Multiphase flow of immiscible fluids on unstructured moving meshes[J]. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2014, 20(1):4-16.

[18] FANG J, PARRIAUX A, RENTSCHLER M, et al. Improved SPH methods for simulating free surface flows of viscous fluids[J]. *Applied Numerical Mathematics*, 2009,59:251-271.

[19] ACHIM C V, ROZAS R E, TOLEDO P G. Semi-decoupled first-order correction for smoothed particle hydrodynamics[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, 93:314-325.

[20] SOLENTHALER B, PAJAROLA R. Predictive - corrective incompressible SPH[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2009, 28(3):1-6.