文章编号: 2095-2163(2021)12-0061-07　　中图分类号: TP18　　文献标志码: A

基于模糊粗糙集的区间集决策表不确定性度量

唐鹏飞

(四川师范大学 数学科学学院, 成都 610066)

摘　要: 模糊粗糙集融合了模糊集与粗糙集两者的优点,是一种更优的不确定性数据处理模型,但将其应用于区间集决策表的研究较为罕见。本文针对区间集决策表,引入模糊粗糙集模型,并在该模型上定义了模糊近似粗糙度等概念;模糊近似粗糙度仅能刻画近似分类的不确定性,为了达到更加全面的度量效果,接着在模糊粗糙集模型中提出模糊粒结构,并基于该结构定义模糊条件熵,模糊条件熵仅能刻画粒化结构的不确定性;最后,将两种度量进行信息融合,提出一种混合不确定性度量,并获得粒化单调性等性质。实例表明,文中给出的度量对研究区间集决策表的不确定性具有指导作用。

关键词: 模糊粗糙集; 区间集决策表; 模糊近似粗糙度; 模糊粒; 模糊条件熵; 不确定性度量

Uncertainty measurement of interval set decision tables based on fuzzy rough set

TANG Pengfei

(School of Mathematical Sciences, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China)

【Abstract】 Fuzzy rough set combines the advantages of both fuzzy set and rough set. It is a better model for processing uncertain data, but it is rare to be applied on interval set decision tables. In this paper, aimed at interval set decision tables, a fuzzy rough set model is introduced, and concepts such as fuzzy approximate roughness are defined on this model. Fuzzy approximate roughness can only describe the uncertainty of approximate classification. In order to achieve a more comprehensive measurement effect, then a fuzzy grain structure is proposed in the fuzzy rough set model, and fuzzy conditional entropy is defined based on this structure. Fuzzy conditional entropy can only describe the uncertainty of the structural structure. Finally, to fuse the information of the two metrics, a mixed uncertainty metric is proposed, and properties such as granular monotonicity are obtained. The example shows that the measurement given in the article has a guiding effect on the uncertainty of the research interval set decision tables.

【Key words】 fuzzy rough set; interval set decision tables; fuzzy approximate roughness; fuzzy granular; fuzzy conditional entropy; uncertainty measurement

0　引　言

粗糙集理论是不确定性分析与智能计算的有效数学工具[1]。目前已广泛应用于属性约简、三支决策和粒度计算等领域[2-4]。

模糊粗糙集将粗糙集和模糊集理论相融合,结合了两者在处理不确定问题方面的优点[5]。目前基于该模型已有诸多研究,例如:文献[6]基于模糊粗糙集提出一种快速约简算法;文献[7]基于距离尺度提出模糊粗糙集模型,定义新的依赖度函数,进而构建其约简算法;文献[8]提出广义正交模糊粗糙集模型,并构建了该模型的属性约简;文献[9]引入决策熵到模糊邻域粗糙集中,刻画其不确定性。可见模糊粗糙集是一种强健的模型结构,值得进一步推广使用。

区间集决策表拓展了经典决策表,其属性值为两个精确集(即用上下边界集来表示一个不确定概念),从而具有更好的不确定性刻画能力,当前具有深入研究[10]。例如:文献[11]基于优势关系,提出 4 个基于粒度的区间集信息表的不确定性度量;文献[12]将区间集引入到概率粗糙近似中,研究区间集概率粗糙集的单调性;文献[13]基于 δ-相似关系,研究区间集信息表的不确定性度量;文献[14]提出决策条件熵刻画区间集决策表的不确定性;文献[15]提出修正 δ-区间决策条件熵刻画区间集决策表的不确定性。

综上所述,基于模糊粗糙集的区间集决策表不确定性度量研究暂未发现。因此,本文将模糊粗糙集引入到区间集决策表,研究其不确定性度量。首先,基于模糊粗糙集,提出模糊近似粗糙度和模糊近似精度;其次,在信息论视角下,提出模糊粒结构和模糊条件熵;最后,将两者进行信息集成,提出一种基于模糊粗糙集的混合不确定性度量,并研究了相关性质。

作者简介: 唐鹏飞(1996-),男,硕士研究生,主要研究方向:粗糙集、粒计算。

收稿日期: 2021-09-06

1 预备知识

1.1 模糊粗糙集理论

模糊决策表记为 $FDS = \{U, AT = C \cup D, V, f\}$，其中论域 $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是一个非空有限对象集，C, D 分别表示条件属性集与决策属性集，$V = \cup_{a \in AT} V_a$ 是属性值集，$f: U \times AT \to V$ 是 $(x, a) \to \mu_a(x)$ 的信息函数，这里 $\mu_a(x) \in [0,1]$ 表示对象 x 在属性 a 下的属性值。

定义 1[5] 在 FDS 中，模糊相似关系 $\widetilde{R}_B$ 可由式(1)的相似度导出：

$$[x]_B(y) = R_B(x, y) \tag{1}$$

其中，$R_B(x, y) \in [0,1]$ 表示对象 x 和 y 在属性集 B 下的相似度。模糊相似关系 $\widetilde{R}_B$ 可导出相应的模糊相似类，式(2)：

$$[x_i]_B = \frac{\widetilde{R}_B(x_i, x_1)}{x_1} + \frac{\widetilde{R}_B(x_i, x_2)}{x_2} + \cdots + \frac{\widetilde{R}_B(x_i, x_n)}{x_n} \tag{2}$$

以及模糊相似分类，式(3)：

$$U/\widetilde{R}_B = \{[x_1]_B, [x_2]_B, \cdots, [x_n]_B\} \tag{3}$$

决策划分 $U/D = \{D_1, \cdots, D_m\}$，其中 $D_h(1 \leqslant h \leqslant m)$ 表示决策类。实际上 D_h 可以看成是一个特殊的模糊集，即式(4)：

$$\widetilde{D}_h = \{\frac{R_{h1}}{x_1} + \frac{R_{h2}}{x_2} + \cdots + \frac{R_{hn}}{x_n}\} \tag{4}$$

其中，如果 $x_j \in D_h$，则 $R_{hj} = 1$；如果 $x_j \notin D_h$，则 $R_{hj} = 0, 1 \leqslant j \leqslant n$。

定义 2[5] 在 FDS 中，对象 x 在条件属性集 B 下，关于模糊集 $\widetilde{D}_h$ 的模糊下、上近似分别为式(5)：

$$\underline{\widetilde{R}}_B(\widetilde{D}_h)(x) = \begin{cases} \min_{y \in U} \max\{1 - \widetilde{R}_B(x, y), \widetilde{D}_h(y)\} & x \in \widetilde{D}_h \\ 0 & x \notin \widetilde{D}_h \end{cases}$$

$$\overline{\widetilde{R}}_B(\widetilde{D}_h)(x) = \begin{cases} \max_{y \in U} \min\{\widetilde{R}_B(x, y), \widetilde{D}_h(y)\} & x \in \widetilde{D}_h \\ 0 & x \notin \widetilde{D}_h \end{cases} \tag{5}$$

称 $(\underline{\widetilde{R}}_B(\widetilde{D}_h), \overline{\widetilde{R}}_B(\widetilde{D}_h))$ 为 $\widetilde{D}_h$ 的一个模糊粗糙集。

1.2 区间集决策表

区间集决策表记为 $IDS = \{U, AT = C \cup D, V, f\}$，其中论域 $U = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是一个非空有限对象集，C, D 分别表示条件属性集与决策属性集，$V = \cup_{a \in AT} V_a$，V_a 是条件属性 a 所有可能取值(每个值都是一个区间集)，信息函数 $f: U \times C \to 2^V$ 诱导的属性值为区间集，即 $\forall x \in U, \forall a \in C, f(x, a) = [x_a^-, x_a^+]$ 是一个区间集，且满足 $x_a^- \subseteq x_a^+, x_a^- \subseteq V_a, x_a^+ \subseteq V_a$，即对象 x 在条件属性 a 下的属性值一定包含 x_a^- 而可能包含 x_a^+。决策属性值仍为单值型。本文用 $|\cdot|$ 表示集合的基数。

定义 3[14] 设 $B \subseteq C$，诱导的相似关系为：

$$SR_B = \{(x_i, x_j) \in U^2 \mid \min_{a \in B} SD_a(x_i, x_j)\} = \cap_{a \in B} SR_a, \tag{6}$$

其中，$SD_a(x_i, x_j) = \dfrac{|x_{ia}^- \cap x_{ja}^-| + |x_{ia}^+ \cap x_{ja}^+|}{|x_{ia}^- \cup x_{ja}^-| + |x_{ia}^+ \cup x_{ja}^+|}$ 为对象 x_i, x_j 关于属性 a 的相似度(设 $f(x_i, a) = [x_{ia}^-, x_{ia}^+]$，$f(x_j, a) = [x_{ja}^-, x_{ja}^+]$)。

定义 3 描述了对象之间的关系，因对象在条件属性下的取值为区间集，带有模糊性，考虑到模糊粗糙集模型处理模糊数据的优越性，下面将其引入到区间集决策表研究不确定性度量。为此，首先建立模糊粗糙集模型。

2 基于模糊相似关系的模糊粗糙集模型

基于定义 1、3，相似关系也可视为论域 U 上的二元模糊相似关系。基于模糊相似关系，定义条件属性子集的模糊相似类及关系矩阵，推广模糊上下近似算子，并研究其相关性质。下面先给出模糊相似类的定义。

定义 4 设区间集决策表 $IDS = \{U, AT = C \cup D, V, f\}$，条件属性子集 $B \subseteq C$，B 诱导的模糊相似关系记为 $\widetilde{SR}_B$，$\widetilde{D}_h$ 为 U 上的决策模糊集，则模糊集 $\widetilde{D}_h$ 关于属性 B 的模糊下、上近似分别为式(7)：

$$\underline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)(x) = \begin{cases} \inf_{y \in U} \max\{1 - \widetilde{SR}_B(x, y), \widetilde{D}_h(y)\} & x \in \widetilde{D}_h \\ 0 & x \notin \widetilde{D}_h \end{cases}$$

$$\overline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)(x) = \begin{cases} \sup_{y \in U} \min\{\widetilde{SR}_B(x, y), \widetilde{D}_h(y)\} & x \in \widetilde{D}_h \\ 0 & x \notin \widetilde{D}_h \end{cases} \tag{7}$$

定义 5　设区间集决策表 $IDS=\{U,AT=C\cup D,V,f\}$，$x_i,x_j\in U$，$1\leqslant i,j\leqslant n$，$B\subseteq C$，属性子集 B 诱导的论域 U 上的二元模糊相似关系记为 $\widetilde{SR}_B$，其隶属函数为式(8)：

$$SR_B(x_i,x_j)=\min_{a\in B}SD_a(x_i,x_j) \tag{8}$$

且对任意 $x_i\in U$，$[x_i]_{\widetilde{SR}_B}$ 为 x_i 关于模糊相似关系 $\widetilde{SR}_B$ 的模糊相似类是一个模糊集，其关于 $x_j\in U$ 隶属度为式(9)：

$$\mu_{[x_i]_{\widetilde{SR}_B}}(x_j)=SR_B(x_i,x_j) \tag{9}$$

模糊相似类 $[x_i]_{\widetilde{SR}_B}$ 的基数为式(10)：

$$|[x_i]_{\widetilde{SR}_B}|=\sum_{j=1}^{|U|}SR_B(x_i,x_j) \tag{10}$$

定义 6　设区间集决策表 $IDS=\{U,AT=C\cup D,V,f\}$，$x_i,x_j\in U$，$\forall a\in C$，$SD_a(x_i,x_j)$ 为 x_i 和 x_j 关于属性 a 的相似度，记式(11)，称 SM_a 为一个模糊相似矩阵。

$$\boldsymbol{SM_a}=\begin{pmatrix} SD_a(x_1,x_1) & \cdots & SD_a(x_1,x_{|U|}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ SD_a(x_{|U|},x_1) & \cdots & SD_a(x_{|U|},x_{|U|}) \end{pmatrix} \tag{11}$$

设 $a,b\in C$，$\boldsymbol{SM}_a$ 和 $\boldsymbol{SM}_b$ 为两个相似矩阵，则 $\boldsymbol{SM}_a$ 和 $\boldsymbol{SM}_b$ 满足以下两个性质：

(1) $\boldsymbol{SM}_a=\boldsymbol{SM}_b\Leftrightarrow SD_a(x_i,x_j)=SD_b(x_i,x_j)$，$\forall x_i,x_j\in U$。

(2) $\boldsymbol{SM}_B=\boldsymbol{SM}_a\cap\boldsymbol{SM}_b\Leftrightarrow\boldsymbol{SR}_B(x_i,x_j)=\min(SD_a(x_i,x_j),SD_b(x_i,x_j))$，$\forall x_i,x_j\in U$。

定理 1　设区间集决策表 $IDS=\{U,AT=C\cup D,V,f\}$，$x_i,x_j\in U$，$A\subseteq B\subseteq C$，$B=A\cup b$，$b\in B$，但 $b\notin A$，则以下结论成立：

(1) $SR_A(x_i,x_j)\geqslant SR_B(x_i,x_j)$

(2) $[x_i]_{\widetilde{SR}_B}\subseteq[x_i]_{\widetilde{SR}_A}$

证明　(1) 因为 $B=A\cup b$，所以 $SR_B(x_i,x_j)=SR_A(x_i,x_j)\cap SD_b(x_i,x_j)=\min(SR_A(x_i,x_j),SD_b(x_i,x_j))\leqslant\min(SR_A(x_i,x_j),1)=SR_A(x_i,x_j)$。

(2) $[x_i]_{\widetilde{SR}_B}\subseteq[x_i]_{\widetilde{SR}_A}\Leftrightarrow[x_i]_{\widetilde{SR}_B}(x_j)\leqslant[x_i]_{\widetilde{SR}_A}(x_j)\Leftrightarrow SR_B(x_i,x_j)\leqslant SR_A(x_i,x_j)\Leftrightarrow\min_{b\in B}SD_B(x_i,x_j)\leqslant\min_{a\in A}SD_A(x_i,x_j)\ \forall x_j\in U$，剩下步骤与(1)证明类似。

基于提出的模糊相似关系，给出两种模糊近似算子的概念，并讨论其相关性质。

定义 7　设区间集决策表 $IDS=\{U,AT=C\cup D,V,f\}$，决策划分 $U/D=\{\widetilde{D}_1,\cdots,\widetilde{D}_m\}$，$\widetilde{D}_h\in U/D$，$1\leqslant h\leqslant m$，$B\subseteq C$，$\widetilde{SR}_B$ 为 U 上的模糊相似关系，则模糊决策类 $\widetilde{D}_h$ 关于属性 B 的模糊下、上近似分别为式(12)和式(13)：

$$\mu_{\underline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)}=\inf_{x_j\in U}\max\{1-SR_B(x_i,x_j),\mu_{\widetilde{D}_h}(x_j)\} \tag{12}$$

$$\mu_{\overline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)}=\sup_{x_j\in U}\min\{SR_B(x_i,x_j),\mu_{\widetilde{D}_h}(x_j)\} \tag{13}$$

其中，$\mu_{\widetilde{D}_h}(x_j)$ 为 x_j 属于 $\widetilde{D}_h$ 的隶属度。

在区间集决策表中，由定义 1 可知：当 $x_j\in\widetilde{D}_h$ 时，$\mu_{\widetilde{D}_h}(x_j)=1$，当 $x_j\notin\widetilde{D}_h$ 时，$\mu_{\widetilde{D}_h}(x_j)=0$。因此，模糊决策类 $\widetilde{D}_h$ 关于属性 B 的模糊下、上近似分别可以简化为式(14)和式(15)：

$$\mu_{\underline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)}(x_i)=\inf\{1-SR_B(x_i,x_j)\mid x_j\notin\widetilde{D}_h\} \tag{14}$$

$$\mu_{\overline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)}(x_i)=\sup\{SR_B(x_i,x_j)\mid x_j\in\widetilde{D}_h\} \tag{15}$$

定理 2　设区间集决策表 $IDS=\{U,AT=C\cup D,V,f\}$，属性子集 $A,B\subseteq C$，模糊决策类 $\widetilde{D}_h\in U/D$，则以下性质成立：

(1) 如果 $A\subseteq B$，则 $\underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)\subseteq\underline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)$，$\overline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)\subseteq\overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)$。

(2) $\underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)\subseteq\widetilde{D}_h\subseteq\overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)$。

(3) $\underline{\widetilde{SR}}_{(A\cup B)}(\widetilde{D}_h)\supseteq\underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)\cup\underline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)$，$\overline{\widetilde{SR}}_{(A\cup B)}(\widetilde{D}_h)\subseteq\overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)\cap\overline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)$。

(4) $\underline{\widetilde{SR}}_A(\underline{SR}_{(A)}(\widetilde{D}_h))\subseteq\underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)$，$\overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)\subseteq\overline{\widetilde{SR}}_A(\overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h))$。

(5) $\underline{\widetilde{SR}}_{(A\cap B)}(\widetilde{D}_h)\subseteq\underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)\cap\underline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)$.

$\overline{\widetilde{SR}}_{(A\cap B)}(\widetilde{D}_h)\supseteq\overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)\cup\overline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)$。

证明　(1) 根据定义 7，对 $\forall x_i\in U$，有

$\mu_{\underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)}(x_i)=\inf\{1-SR_A(x_i,x_j)\mid x_j\notin\widetilde{D}_h\}$，

$\mu_{\underline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)}(x_i)=\inf\{1-SR_B(x_i,x_j)\mid x_j\notin\widetilde{D}_h\}$。

因为 $A\subseteq B$，根据定理 1(1) 有 $SR_A(x_i,x_j)\geqslant SR_B(x_i,x_j)$，所以 $1-SR_A(x_i,x_j)\leqslant1-SR_B(x_i,x_j)$，从而 $\mu_{\underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)}(x_i)=\inf\{1-SR_A(x_i,x_j)\mid x_j\notin\widetilde{D}_h\}\leqslant\mu_{\underline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)}(x_i)=\inf\{1-SR_B(x_i,x_j)\mid x_j\notin\widetilde{D}_h\}$。

所以 $\underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)\subseteq\underline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)$ 成立。

根据定义 7，对 $\forall x_i\in U$，有

$\mu_{\overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)}(x_i) = \sup\{SR_A(x_i,x_j) \mid x_j \in \widetilde{D}_h\}$,

$\mu_{\overline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)}(x_i) = \sup\{SR_B(x_i,x_j) \mid x_j \in \widetilde{D}_h\}$。

因为 $A \subseteq B$，根据定理 1(1) 有 $SR_A(x_i,x_j) \geqslant SR_B(x_i,x_j)$，所以

$\mu_{\overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)}(x_i) = \sup\{SR_A(x_i,x_j) \mid x_j \in \widetilde{D}_h\} \geqslant \mu_{\overline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)}(x_i) = \sup\{SR_B(x_i,x_j) \mid x_j \in \widetilde{D}_h\}$。

所以 $\overline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h) \subseteq \overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)$ 成立。

(2)因为 $\forall x_i \in U$，有

$\mu_{\underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)}(x_i) = \inf\{1 - SR_A(x_i,x_j) \mid x_j \notin \widetilde{D}_h\}$。

当 $x_i \in \widetilde{D}_h$ 时，有 $\mu_{\underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)}(x_i) \leqslant 1 = \mu_{\widetilde{D}_h}(x_i) = \mu_{\overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)}(x_i)$。当 $x_i \notin \widetilde{D}_h$ 时，有 $\mu_{\underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)}(x_i) = 0 \leqslant \mu_{\widetilde{D}_h}(x_i) \leqslant \sup\{SR_A(x_i,x_j) \mid x_j \in \widetilde{D}_h\} = \mu_{\overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)}(x_i)$。

综上所述，$\mu_{\underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)}(x_i) \leqslant \mu_{(\widetilde{D}_h)}(x_i) \leqslant \mu_{\overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)}(x_i)$。所以 $\underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h) \subseteq \widetilde{D}_h \subseteq \overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)$ 成立。

(3)因为 $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$。由(1)的证明可知 $\underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h) \subseteq \underline{\widetilde{SR}}_{(A\cup B)}(\widetilde{D}_h)$，$\underline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h) \subseteq \underline{\widetilde{SR}}_{(A\cup B)}(\widetilde{D}_h)$，所以 $\underline{\widetilde{SR}}_{(A\cup B)}(\widetilde{D}_h) \supseteq \underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h) \cup \underline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)$ 成立。同理可证 $\overline{\widetilde{SR}}_{(A\cup B)}(\widetilde{D}_h) \subseteq \overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h) \cap \overline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)$。

(4) 根据定义 7，对 $\forall x_i \in U$，有

$\mu_{\underline{\widetilde{SR}}_A(\underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h))}(x_i) = \inf_{x_j\in U}\max\{1 - SR_A(x_i,x_j), \mu_{\underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)}(x_i)\}$,

$\mu_{\underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)}(x_i) = \inf_{x_j\in U}\max\{1 - SR_A(x_i,x_j), \mu_{\widetilde{D}_h}(x_j)\}$。

由(2)可知 $\underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h) \subseteq \widetilde{D}_h$，所以有 $\mu_{\underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)}(x_i) \leqslant \mu_{\widetilde{D}_h}(x_j)$。又因为当 $e \leqslant f, g \leqslant k$ 时，有 $\max(e,g) \leqslant \max(f,k)$。从而 $\forall x_j \in U$，有 $\max\{1 - SR_A(x_i,x_j), \mu_{\underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)}(x_i)\} \leqslant \max\{1 - SR_A(x_i,x_j), \mu_{\widetilde{D}_h}(x_j)\}$，即 $\mu_{\underline{\widetilde{SR}}_A(\underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h))}(x_i) \leqslant \mu_{\underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)}(x_i)$，所以 $\underline{\widetilde{SR}}_A(\underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)) \subseteq \underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)$ 成立。

根据定义 7，对 $\forall x_i \in U$，有

$\mu_{\overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)}(x_i) = \sup_{x_j\in U}\min\{SR_A(x_i,x_j), \mu_{\widetilde{D}_h}(x_j)\}$

$\mu_{\overline{\widetilde{SR}}_A(\overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h))}(x_i) = \sup_{x_j\in U}\min\{SR_A(x_i,x_j), \mu_{\overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)}(x_i)\}$

由(2)可知 $\widetilde{D}_h \subseteq \overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)$，所以有 $\mu_{\widetilde{D}_h}(x_j) \leqslant \mu_{\overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)}(x_j)$。又因为当 $e \leqslant f, g \leqslant k$ 时，有 $\min(e,g) \leqslant \min(f,k)$。从而 $\forall x_j \in U$，有

$\min\{SR_A(x_i,x_j), \mu_{\widetilde{D}_h}(x_j)\} \leqslant \min\{SR_A(x_i,x_j), \mu_{\overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)}(x_i)\}$，即 $\mu_{\overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)}(x_i) \leqslant \mu_{\overline{\widetilde{SR}}_A(\overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h))}(x_i)$。所以 $\overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h) \subseteq \overline{\widetilde{SR}}_A(\overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h))$ 成立。

(5)因为 $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$，由(1)的证明可知 $\underline{\widetilde{SR}}_{(A\cap B)}(\widetilde{D}_h) \subseteq \underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)$，$\underline{\widetilde{SR}}_{(A\cap B)}(\widetilde{D}_h) \subseteq \underline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)$，所以 $\underline{\widetilde{SR}}_{(A\cap B)}(\widetilde{D}_h) \subseteq \underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h) \cap \underline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)$ 成立。

同理可证 $\overline{\widetilde{SR}}_{(A\cap B)}(\widetilde{D}_h) \supseteq \overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h) \cup \overline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)$。

3 区间集决策表的不确定性度量

经典决策表的不确定性度量是基于等价关系提出的，不适用于区间集决策表。本节基于模糊粗糙集模型，定义区间集决策表不确定性度量的相关概念和性质，并在理论上加以证明。

3.1 模糊近似粗糙度和模糊近似精度度量

基于模糊粗糙集模型，给出区间集决策表中的不确定性度量概念：模糊近似精度和模糊近似粗糙度。其通过粗糙集边界域的视角去刻画区间集决策表的不确定性。

定义 8 设区间集决策表 $IDS = \{U, AT = C \cup D, V, f\}$，决策划分 $U/D = \{\widetilde{D}_1, \widetilde{D}_2, \cdots, \widetilde{D}_m\}$，对于 $\forall B \subseteq C$，决策划分 U/D 关于 B 的模糊近似精度和模糊近似粗糙度分别为式(16)和式(17)：

$$f\alpha_B(U/D) = \frac{\sum_{\widetilde{D}_h \in U/D}\sum_{x_i\in U}\mu_{\underline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)}(x_i)}{\sum_{\widetilde{D}_h \in U/D}\sum_{x_i\in U}\mu_{\overline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)}(x_i)} \tag{16}$$

$$f\rho_B(U/D) = 1 - f\alpha_B(U/D) \tag{17}$$

定理 3 设区间集决策表 $IDS = \{U, AT = C \cup D, V, f\}$，属性子集 $A \subseteq B \subseteq C$，则下列结论成立：

(1) $f\alpha_B(U/D) \geqslant f\alpha_A(U/D)$，

(2) $f\rho_B(U/D) \leqslant f\rho_A(U/D)$。

证明 (1) 根据定理 2(1)，对 $\forall x_i \in U, \widetilde{D}_h \in U/D$，有 $\mu_{\underline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)}(x_i) \leqslant \mu_{\underline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)}(x_i)$，$\mu_{\overline{\widetilde{SR}}_A(\widetilde{D}_h)}(x_i) \geqslant \mu_{\overline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)}(x_i)$。

所以

$$f\alpha_B(U/D) = \frac{\sum_{\widetilde{D}_h \in U/D}\sum_{x_i\in U}\mu_{\underline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)}(x_i)}{\sum_{\widetilde{D}_h \in U/D}\sum_{x_i\in U}\mu_{\overline{\widetilde{SR}}_B(\widetilde{D}_h)}(x_i)} \geqslant$$

$$\frac{\sum_{\tilde{D}_h \in U/D} \sum_{x_i \in U} \mu_{\underline{\widetilde{SR}}_A(\tilde{D}_h)}(x_i)}{\sum_{\tilde{D}_h \in U/D} \sum_{x_i \in U} \mu_{\overline{\widetilde{SR}}_A(\tilde{D}_h)}(x_i)} = f\alpha_A(U/D)。$$

(2) $f\rho_B(U/D) = 1 - f\alpha_B(U/D) \leqslant 1 - f\alpha_A(U/D) = f\rho_A(U/D)$。

定理 3 表明,模糊近似精度、模糊近似粗糙度具有关于属性的粒化单调性,能够度量上、下近似产生的不确定性。

3.2 基于模糊条件熵的混合不确定性度量

模糊近似粗糙度从边界域角度刻画了区间集决策表的不确定性,忽略了知识划分对区间集决策表不确定性的影响,下面引入模糊条件熵,提出一种基于模糊条件熵的混合不确定性度量来多角度地度量区间集决策表的不确定性。在此之前,先基于模糊相似关系,定义模糊粒结构。

定义 9　设区间集决策表 $IDS = \{U, AT = C \cup D, V, f\}$,属性子集 $B \subseteq C$ 诱导的模糊相似关系为 $\widetilde{SR}_B$,那么 $\widetilde{SR}_B$ 在 IDS 中决定的模糊粒结构为式(18):

$$G(B) = \{[x_1]_{\widetilde{SR}_B}, [x_2]_{\widetilde{SR}_B}, \ldots, [x_{|U|}]_{\widetilde{SR}_B}\} \quad (18)$$

其中,$[x_i]_{\widetilde{SR}_B}$ 为 x_i 在 $\widetilde{SR}_B$ 下的模糊粒。

定义 10　设区间集决策表 $IDS = \{U, AT = C \cup D, V, f\}$,$B \subseteq C$,$G(B) = \{[x_1]_{\widetilde{SR}_B}, [x_2]_{\widetilde{SR}_B}, \ldots, [x_{|U|}]_{\widetilde{SR}_B}\}$,$\widetilde{D}_h \in U/D$,则 D 关于 B 的模糊条件熵为式(19):

$$FH(D \mid B) = -\sum_{i=1}^{|U|} p([x_i]_{\widetilde{SR}_B}) \sum_{h=1}^{|U/D|} p(\widetilde{D}_h \mid [x_i]_{\widetilde{SR}_B}) \cdot \log p(\widetilde{D}_h \mid [x_i]_{\widetilde{SR}_B}) = -\sum_{i=1}^{|U|} \sum_{h=1}^{|U/D|} \frac{|[x_i]_{\widetilde{SR}_B} \cap \widetilde{D}_h|}{|U|} \cdot \log \frac{|[x_i]_{\widetilde{SR}_B} \cap \widetilde{D}_h|}{|[x_i]_{\widetilde{SR}_B}|} \quad (19)$$

定理 4　设区间集决策表 $IDS = \{U, AT = C \cup D, V, f\}$,属性子集 $A, B \subseteq C$,由 A, B 决定的模糊粒结构分别为 $G(A), G(B)$。则下列结论成立。

(1) $FH(D \mid A) \geqslant 0, FH(D \mid B) \geqslant 0$

(2) 如果 $G(B) = G(A)$,则 $FH(D \mid B) = FH(D \mid A)$

(3) 如果 $A \subseteq B$,则 $FH(D \mid A) \geqslant FH(D \mid B)$

证明　(1) 由定义可知显然成立。

(2) 因为 $G(B) = G(A)$,所以对 $\forall x_i \in U$,有 $[x_i]_{\widetilde{SR}_B} = [x_i]_{\widetilde{SR}_A}$,所以对 $\forall \widetilde{D}_h \in U/D$,有 $|[x_i]_{\widetilde{SR}_B} \cap \widetilde{D}_h| = |[x_i]_{\widetilde{SR}_A} \cap \widetilde{D}_h|$,即 $FH(D \mid B) = FH(D \mid A)$。

(3) 因为 $A \subseteq B$,由定理 1(2) 可得 $[x_i]_{\widetilde{SR}_B} \subseteq [x_i]_{\widetilde{SR}_A}$,假设 $|[x_i]_{\widetilde{SR}_B}| = |[x_i]_{\widetilde{SR}_B} \cap \widetilde{D}_h| + |[x_i]_{\widetilde{SR}_B} \cap (\widetilde{U} - \widetilde{D}_h)| = B_1 + B_2$,$|[x_i]_{\widetilde{SR}_A}| = |[x_i]_{\widetilde{SR}_A} \cap \widetilde{D}_h| + |[x_i]_{\widetilde{SR}_A} \cap (\widetilde{U} - \widetilde{D}_h)| = A_1 + A_2$。易得 $A_1 \geqslant B_1 \geqslant 0, A_2 \geqslant B_2 \geqslant 0$。于是模糊条件熵可以简写为

$$FH(D \mid A) = -\sum_{i=1}^{|U|} \sum_{h=1}^{|U/D|} \frac{A_1}{|U|} \log \frac{A_1}{A_1 + A_2}$$

$$FH(D \mid B) = -\sum_{i=1}^{|U|} \sum_{h=1}^{|U/D|} \frac{B_1}{|U|} \log \frac{B_1}{B_1 + B_2}$$

假设 $f(x, y) = -x \log \frac{x}{x+y}, x > 0, y \geqslant 0$,原有的模糊条件熵的单调性转化为对函数 $f(x, y)$ 的单调性。对函数 $f(x, y)$ 分别在 x 和 y 方向上求偏导

$$\partial f(x, y) / \partial x \geqslant 0$$

$$\partial f(x, y) / \partial y > 0$$

通过计算,得到 $f(A_1, A_2) \geqslant f(A_1, B_2) \geqslant f(B_1, B_2)$,即 $\frac{A_1}{|U|} \log \frac{A_1}{A_1 + A_2} \geqslant \frac{B_1}{|U|} \log \frac{B_1}{B_1 + B_2}$。因此,得到 $FH(D \mid A) \geqslant FH(D \mid B)$。

定理 4 表明,模糊条件熵满足不确定性公理化定义的非负性、不变性、单调性,是一种有效的度量方式,但其只能刻画粒化结构的不确定性。

在定义 8 中,模糊近似粗糙度从代数角度描述近似分类的不确定性,本质上是衡量区间集决策表中所包含有效知识的量,而定义 10 中模糊条件熵从信息角度度量粒化结构的不确定性,本质上是通过粒化结构的每个粒子平均所含信息量的大小对不确定性进行刻画。由于模糊近似粗糙度和模糊条件熵两者都满足单调性,且两者是从不同视角度量区间集决策表的不确定性,各自具有优越性。因此,为了对区间集决策表的不确定性达到一种更为全面的评估,下面提出一种基于模糊条件熵的混合不确定性度量来刻画区间集决策表的不确定性。

定义 11　设区间集决策表 $IDS = \{U, AT = C \cup D, V, f\}$,属性子集 $B \subseteq C$,决策划分 U/D 关于 B 的模糊近似粗糙度与模糊条件熵分别为 $f\rho_B(U/D)$,$FH(D \mid B)$。那么基于模糊条件熵的混合不确定性

度量为式(20)：

$$FMUM(D \mid B) = f\rho_B(U/D) \cdot FH(D \mid B) \tag{20}$$

定理 5　设区间集决策表 $IDS = \{U, AT = C \cup D, V, f\}$，属性子集 $A \subseteq B \subseteq C$，那么混合不确定性度量满足式(21)：

$$FMUM(D \mid A) \geqslant FMUM(D \mid B) \tag{21}$$

基于定义 11 的乘积融合定义，定理 5 所述的粒化单调性自然成立。混合不确定性度量融合了模糊近似粗糙度和模糊条件信息熵的优点，既能度量上、下近似产生的不确定性，又能表征粒化结构变化时不确定性的变化，该度量与单一度量方式相比更加全面，可以弥补两种度量之间的不足。

4　举例分析

为了更好的说明本文提出的不确定性度量方法的有效性，下面通过一个实例来说明计算方法和结果。

举例：区间集决策表 IDS 见表 1[14]，其中 $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$，$C = \{a_1, a_2, a_3\}$，$D = \{d\}$。

表 1　区间集决策表

Tab. 1　Interval set decision table

U	a_1	a_2	a_3	d
x_1	[{0},{0,1,2}]	[{1,2},{1,2,3}]	[{0,2},{0,1,2}]	1
x_2	[{2},{2,3}]	[{2,3},{1,2,3}]	[{1,2},{1,2}]	0
x_3	[{2},{2,3}]	[{3},{2,3}]	[{0,2},{0,1,2}]	1
x_4	[{2},{2,3}]	[{2},{2}]	[{1,2},{1,2}]	0
x_5	[{3},{1,3}]	[{0},{0,2}]	[{1,2},{1,2}]	1
x_6	[{2},{1,2}]	[{1,2},{1,2}]	[{1,2},{1,2}]	0

通过计算得到属性 a_1, a_2, a_3 的模糊相似矩阵分别为 $\boldsymbol{SM}_{a_1}, \boldsymbol{SM}_{a_2}, \boldsymbol{SM}_{a_3}$。

$$\boldsymbol{SM}_{a_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0.17 & 0.17 & 0.17 & 0.17 & 0.40 \\ 0.17 & 1 & 1 & 1 & 0.20 & 0.50 \\ 0.17 & 1 & 1 & 1 & 0.20 & 0.50 \\ 0.17 & 1 & 1 & 1 & 0.20 & 0.50 \\ 0.17 & 0.20 & 0.20 & 0.20 & 1 & 0.20 \\ 0.40 & 0.50 & 0.50 & 0.50 & 0.20 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{SM}_{a_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0.67 & 0.33 & 0.40 & 0.14 & 0.80 \\ 0.67 & 1 & 0.60 & 0.40 & 0.14 & 0.50 \\ 0.33 & 0.60 & 1 & 0.25 & 0.20 & 0.17 \\ 0.40 & 0.40 & 0.25 & 1 & 0.25 & 0.50 \\ 0.14 & 0.14 & 0.20 & 0.25 & 1 & 0.17 \\ 0.80 & 0.50 & 0.17 & 0.50 & 0.17 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{SM}_{a_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0.50 & 1 & 0.50 & 0.50 & 0.50 \\ 0.50 & 1 & 0.50 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0.50 & 1 & 0.50 & 0.50 & 0.50 \\ 0.50 & 1 & 0.50 & 1 & 1 & 1 \\ 0.50 & 1 & 0.50 & 1 & 1 & 1 \\ 0.50 & 1 & 0.50 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

假设 $A = \{a_1, a_2\}$，$B = \{a_1, a_2, a_3\}$，则属性集 A, B 的模糊相似矩阵分别为 $\boldsymbol{SM}_A, \boldsymbol{SM}_B$。

$$\boldsymbol{SM}_A = \begin{pmatrix} 1 & 0.17 & 0.17 & 0.17 & 0.14 & 0.40 \\ 0.17 & 1 & 0.60 & 0.40 & 0.14 & 0.50 \\ 0.17 & 0.60 & 1 & 0.25 & 0.20 & 0.17 \\ 0.17 & 0.40 & 0.25 & 1 & 0.20 & 0.50 \\ 0.14 & 0.14 & 0.20 & 0.20 & 1 & 0.17 \\ 0.40 & 0.50 & 0.17 & 0.50 & 0.17 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{SM}_B = \begin{pmatrix} 1 & 0.17 & 0.17 & 0.17 & 0.17 & 0.40 \\ 0.17 & 1 & 0.50 & 0.40 & 0.14 & 0.50 \\ 0.17 & 0.50 & 1 & 0.25 & 0.20 & 0.14 \\ 0.17 & 0.40 & 0.25 & 1 & 0.20 & 0.50 \\ 0.17 & 0.14 & 0.20 & 0.20 & 1 & 0.17 \\ 0.40 & 0.50 & 0.14 & 0.50 & 0.17 & 1 \end{pmatrix},$$

决策划分 $U/D = \{\widetilde{D}_1, \widetilde{D}_2\} = \left\{\left\{\frac{1}{x_1} + \frac{0}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{0}{x_4} + \frac{1}{x_5} + \frac{0}{x_6}\right\}, \left\{\frac{0}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{0}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{0}{x_5} + \frac{1}{x_6}\right\}\right\}$，通过定义 7 得到模糊决策类 $\widetilde{D}_1, \widetilde{D}_2$ 分别关于属性集 A, B 的上、下近似为：

$$\mu_{\overline{\tilde{SR}}_A(\tilde{D}_1)}(x) = \sup\{SR_A(x, x_j) \mid x_j \in \widetilde{D}_1\} = \frac{1}{x_1} + \frac{0.60}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{0.25}{x_4} + \frac{1}{x_5} + \frac{0.40}{x_6},$$

$$\mu_{\overline{\tilde{SR}}_A(\tilde{D}_2)}(x) = \sup\{SR_A(x, x_j) \mid x_j \in \widetilde{D}_2\} = \frac{0.40}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{0.60}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{0.20}{x_5} + \frac{1}{x_6},$$

$$\mu_{\underline{\tilde{SR}}_A(\tilde{D}_1)}(x) = \inf\{1 - SR_A(x, x_j) \mid x_j \notin \widetilde{D}_1\} = \frac{0.60}{x_1} + \frac{0}{x_2} + \frac{0.40}{x_3} + \frac{0}{x_4} + \frac{0.80}{x_5} + \frac{0}{x_6},$$

$$\mu_{\underline{\tilde{SR}}_A(\tilde{D}_2)}(x) = \inf\{1 - SR_A(x, x_j) \mid x_j \notin \widetilde{D}_2\} = \frac{0}{x_1} + \frac{0.40}{x_2} + \frac{0}{x_3} + \frac{0.75}{x_4} + \frac{0}{x_5} + \frac{0.60}{x_6},$$

$$\mu_{\overline{\tilde{SR}}_B(\tilde{D}_1)}(x) = \sup\{SR_B(x, x_j) \mid x_j \in \widetilde{D}_1\} = \frac{1}{x_1} +$$

$\frac{0.50}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{0.25}{x_4}+\frac{1}{x_5}+\frac{0.40}{x_6}$,

$\mu_{\widetilde{\overline{SR}}_B(\widetilde{D}_2)}(x)=\sup\{SR_B(x,x_j)\mid x_j\in\widetilde{D}_2\}=\frac{0.40}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{0.50}{x_3}+\frac{1}{x_4}+\frac{0.20}{x_5}+\frac{1}{x_6}$,

$\mu_{\widetilde{\underline{SR}}_B(\widetilde{D}_1)}(x)=\inf\{1-SR_B(x,x_j)\mid x_j\notin\widetilde{D}_1\}=\frac{0.60}{x_1}+\frac{0}{x_2}+\frac{0.50}{x_3}+\frac{0}{x_4}+\frac{0.80}{x_5}+\frac{0}{x_6}$,

$\mu_{\widetilde{\underline{SR}}_B(\widetilde{D}_2)}(x)=\inf\{1-SR_B(x,x_j)\mid x_j\notin\widetilde{D}_2\}=\frac{0}{x_1}+\frac{0.50}{x_2}+\frac{0}{x_3}+\frac{0.75}{x_4}+\frac{0}{x_5}+\frac{0.60}{x_6}$,

通过定义 8 可得决策划分 U/D 关于 A,B 的模糊近似精度和模糊近似粗糙度分别为：

$f\alpha_A(U/D)=0.42, f\rho_A(U/D)=0.58$,

$f\alpha_B(U/D)=0.52, f\rho_B(U/D)=0.48$,

$f\alpha_A(U/D)\leqslant f\alpha_B(U/D), f\rho_A(U/D)\geqslant f\rho_B(U/D)$。与定理 3 一致。

通过定义 10 可得决策划分 U/D 关于 A,B 的模糊条件熵分别为：

$FH(D\mid A)=1.01, FH(D\mid B)=0.97.$

则 $FH(D\mid A)\geqslant FH(D\mid B)$，与定理 4 一致。

通过定义 11 可得决策划分 U/D 关于 A,B 的混合不确定性度量分别为：

$FMUM(D\mid A)=0.59, FMUM(D\mid B)=0.46$。

则 $FMUM(D\mid A)\geqslant FMUM(D\mid B)$，与定理 5 一致。

5　结束语

本文通过引入模糊粗糙集模型，定义模糊近似粗糙度和模糊条件熵，并将两者进行信息融合，提出一种基于模糊条件熵的混合不确定性度量，其从两个不同的角度刻画区间集决策表的不确定性，是一种更加全面、有效的度量方法。实例表明，所提度量对研究区间集决策表的不确定性具有指导作用。在未来工作中，可将本文所提度量用于构建区间集决策表的属性约简。

参考文献

[1] PAWLAK Z. Rough sets[J]. International Journal of Computer & Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.

[2] SUN L, XU J C, TIAN Y. Feature selection using rough entropy-based uncertainty measures in incomplete decision systems[J]. Knowledge-based Systems, 2012, 36(1):206-216.

[3] LIANG J Y, QIAN Y H. Information granules and entropy theory in information systems[J]. Science in China Series F: Information Science, 2008, 51(10): 1427-1444.

[4] DENG X F, YAO Y Y. A multifaceted analysis of probabilistic three-way decision[J]. Fundamental Informatiace, 2014, 132(3):291-313.

[5] DUBOIS D, PRADE H. Rough fuzzy sets and fuzzy rough sets[J]. International Journal of General Systems, 1990, 17: 191-209.

[6] 张晓，杨燕燕. 一种基于模糊粗糙集的快速特征选择算法[J]. 数据采集与处理, 2019, 34(3): 538-547.

[7] 陈毅宁，陈红梅. 基于距离比值尺度的模糊粗糙集属性约简[J]. 计算机科学, 2020, 47(3): 67-72.

[8] 闫晨，张海东，南太本. 基于广义正交模糊粗糙集的属性约简[J]. 模糊系统与数学, 2020,34(6):130-139.

[9] 樊雲瑞，张贤勇，杨霁琳. 模糊邻域粗糙集的决策熵不确定性度量[J]. 计算机工程与设计, 2021, 42(5): 1300-1306.

[10] ZHANG Q H, WANG J, WANG G Y, et al. Approximation set of the interval set in Pawlak's space[J]. The Scientific World Journal, 2014(11):317-329.

[11] WANG H, YUE H B. Entropy measures and granularity measures for interval and set-valued information systems[J]. Soft Computing, 2016, 20(9): 3489-3495.

[12] 马建敏，景媛，姚红娟. 区间集概率粗糙集的单调性[J]. 模糊系统与数学, 2018, 32(4): 180-190.

[13] ZHANG Y M, JIA X Y, TANG Z M, et al. Uncertainty measures for interval set information tables based on interval δ-similarity relation[J]. Information Sciences, 2019, 501: 272-292.

[14] 张倚萌，贾修一，唐振民. 基于条件信息熵的区间集决策信息表的不确定性度量[J]. 南京理工大学学报, 2019, 43(4): 393-401.

[15] 唐鹏飞. 区间集决策表不确定性度量的修正 δ-区间决策条件熵方法[J]. 内江师范学院学报, 2021, 36(6): 34-39.